Handbuch
der
Statik feſter Körper.

Mit
vorzüglicher Rückſicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgeſetzt
von

J. A. Eytelwein,
Königl. Preuß. geheimen Oberbaurathe; Director der Königl. Bau-Akademie; der Akademie der Wiſſenſchaften und der Akademie der Künſte und deren Senats zu Berlin, der bataviſchen Geſellſchaft der Experimental-Philoſophie zu Rotterdam, der Geſellſchaft der Wiſſenſchaften und Künſte zu Frankfurth an der Oder, der Oſtpreuß. phyſikaliſch-ökonomiſchen Geſellſchaft, der ökonomiſchen Societät zu Leipzig, und der märkiſchen ökonomiſchen Geſellſchaft zu Potsdam Mitgliede.

Dritter Band,
welcher als Anhang zur Statik, die Theorie einiger transcendenten krummen Linien enthält.

Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin, 1808.
In der Realſchulbuchhandlung.

Theorie

derjenigen

transſcendenten krummen Linien,

welche vorzüglich

bei ſtatiſchen Unterſuchungen

vorkommen.

Von

J. A. Eytelwein.

Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin, 1808.

In der Realſchulbuchhandlung.

Inhalt.

I. Abſchnitt. Von der Cykloide oder Radlinie.

Erklärungen. . . . . §. 1.
Gleichungen für die Cykloide. . . §. 2 — 3.
Zeichnung derſelben. . . . . . §. 4.
Lage der Tangente . . . . . . §. 5.
Rectification. . . . . §. 6.
Krümmungshalbmeſſer. . . . . §. 7.
Quadratur. . . . . . . §. 8 — 9.
Verkürzte Cykloide. Zeichnung derſelben. . §. 10.
Gleichungen. . . . . §. 11.
Geſtreckte Cykloide. . . . . . . §. 12.

II. Abſchnitt. Von der Epicykloide und Hypocycloide.

(I) Die gemeine Epicykloide.

Erklärungen. . . . . §. 13.
Zeichnung. . . . . . . §. 14 — 15.
Gleichungen. . . . . §. 16.
Lage der Tangente. . . . . . . §. 17.
Rectification. . . . . §. 18.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 19 — 20.
Quadratur. . . . . §. 21.

(II) Die verkürzte Epicykloide.

Erklärungen und Zeichnung. . . . . §. 22.
Gleichungen. Lage des Doppelpunkts. . §. 23.

(III) Die geſtreckte Epicykloide.

Erklärung. Zeichnung. Lage des Wendungspunkts. . . . . . . §. 24.

(IV) Die Hypocykloide.

Erklärung. . . . . § 25.
Zeichnung. . . . . §. 26.
Wenn ſolche eine grade Linie wird. . . §. 27.
Gleichungen. Tangente. . . §. 28 — 29.
Berührung der Hypocykloide und Epicykloide. §. 30 — 31.

(V) Die ſphäriſche Epicykloide.

Erklärungen. . . . . §. 32.
Halbmeſſer der Kugeloberfläche, zum Beſchreiben der Epicykloide. . . . §. 33 — 34.
Zeichnung. . . . . . §. 35 — 36.
Rectification. . . . . §. 37.
Wie ſolche eine gemeine Epicykloide wird. §. 38 — 40.
Lage der Tangente. . . . . . . §. 41.

III. Abſchnitt. Von der Evolvente oder Abwickelungslinie des Kreiſes.

Erklärungen. . . . . §. 42.
Zeichnung. . . . . §. 43.
Krümmungshalbmeſſer. . . . . . §. 44.
Tangente. . . . . §. 45.
Rectification. . . . . §. 46.
Quadratur. . . . . §. 47.

IV. Abſchnitt. Von der logarithmiſchen Linie.

Erklärung. Gleichungen. . . §. 48 — 49.
Zeichnung. . . . . . §. 50.
Tangente. . . . . . . §. 51.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 52.
Rectification. . . . . . §. 53.
Quadratur. . . . . . §. 54.

V. Abſchnitt. Von den Spirallinien.

Erklärungen. . . . . . §. 55.

(I) Von der linearen oder archimediſchen Spirallinie.

Gleichung. . . . . §. 56 — 57.
Zeichnung. . . . . . §. 58.
Tangente. . . . . . §. 59.
Rectification. . . . . . §. 60.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 61.
Quadratur. . . . . . §. 62.

(II) Von der paraboliſchen Spirallinie.

Gattungen und Arten derſelben. . . §. 63.
Gleichung für die erſte Art. . . §. 64 — 65
Tangente. . . . . . §. 66.
Rectification. . . . . . §. 67.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 68.
Quadratur. . . . . . §. 69.
Gleichung für die zweite Art. . §. 70 — 71.
Tangente. . . . . . §. 72.
Rectification. . . . . . §. 73.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 74.
Quadratur. . . . . . §. 75.

(III) Von der hyperboliſchen Spirallinie.

Erklärung. Gleichung. . . . . §. 76.
Tangente. . . . . . §. 77.
Rectification. . . . . . §. 78.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 79.
Quadratur. . . . . . §. 80.

(IV) Von der logarithmiſchen Spirallinie.

Erklärung. Gleichung. . . . §. 81 — 82.
Tangente. . . . . . §. 83 — 84.
Rectification. . . . . . §. 85.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 86.
Quadratur. . . . . . §. 87.

VI. Abſchnitt. Von der Kettenlinie.

Erklärung. Allgemeine Gleichungen. §. 88 — 89.
Gilt auch für Gewölbſteine. . . . . §. 90.
Gleichungen für die gemeine Kettenlinie. . §. 91.
Wie ſolche eine Parabel wird. . . . §. 92.
Beſtimmung der Conſtante in der Gleichung. §. 93 — 95.
Tangente. . . . . §. 96 — 97.
Krümmungshalbmeſſer. . . . §. 98 — 99.
Spannung. . . . . §. 100 — 102.
Quadratur. . . . . . . §. 103.
Quadratur von Gewölbflächen. §. 104 — 108.
Kubatur. . . . . §. 109.
Krumme Oberfläche des Kettenkonoids. . §. 110.

VII. Abſchnitt. Von der elaſtiſchen Linie.

Erklärungen. . . . . . . §. 111.

(I) Wenn die elaſtiſche Linie nur wenig gebogen iſt.

Die gewichtloſe Ruthe an ihrem Ende belaſtet. §. 112.
Die ſchwere Ruthe an einem Ende befeſtiget. §. 113.

Vergleichung ihrer Biegungen. . . . . §. 114.
Die Ruthe zwiſchen zwei Unterſtützungspunkten belaſtet. . . . . . . §. 115.
Gleichungen. . . . . . . §. 116.
Größte Ordinate. . . . . . . §. 117.
Krümmungshalbmeſſer. . . . . . §. 118.
Wenn die Laſt in der Mitte hängt. . . §. 119.
Die ſchwere Ruthe an beiden Enden unterſtützt. §. 120 — 121.
Vergleichung ihrer Biegungen. . . . §. 122.
Druck auf drei Unterſtützungspunkte. §. 123 — 126.
Auf vier. . . . . . §. 127 — 130.
Gleichungen, wenn die am Ende belaſtete Ruthe in horizontalem Boden befeſtigt iſt. . §. 131.
Wenn die verlängerte Richtung der Laſt in den Befeſtigungspunkt fällt. . . . §. 132.
Kleinſte Kraft zum Biegen. . . . §. 133.

(II) Allgemeinere Unterſuchung.

Gleichungen für die am Ende belaſtete Ruthe. §. 134 — 137.
Näherungsausdrücke. . . §. 138 — 141.
Quadratur. . . . . §. 142.
Wenn die Richtung der Laſt auf die urſprüngliche Richtung der Ruthe ſenkrecht iſt. . . §. 144.
Befeſtigung der Ruthe in horizontalem Boden. §. 145.
Wenn die verlängerte Richtung der Laſt in den Befeſtigungspunkt fällt. . . . . . §. 146.
Näherungsausdrücke. . . §. 147 — 149.
Rectification. . . . . §. 150.

Nachtrag,

welcher einige Näherungsausdrücke für trigonometriſche Linien enthält.

Für den Sinus eines gegebenen Kreisbogens. §. 152.
Für den Kreisbogen von einem Sinus. . §. 153.
Für den Coſinus eines Kreisbogens. . . §. 154.
Den Kreisbogen durch den Sinus zu finden. §. 155.
Für das Quadrat eines Kreisbogens, welches einem Coſinus entſpricht . . . §. 156.
Die Tangente aus dem Kreisbogen zu finden. §. 157.

Erſter Abſchnitt.

Von der Cykloide oder Radlinie.

§. 1.

Auf einer graden Linie AD, Figur 1., welche hier die Grundlinie oder Baſis heißt, befinde ſich ein Kreis AMBA, welcher in A die Grundlinie berührt, und in einerlei Ebene auf der Grundlinie von A nach D gewälzt werde. Kommt der Kreis AB in die Lage M′N, und berührt die Grundlinie in M′, ſo muß nach dem Begriffe der Wälzung, wenn der Punkt M des Kreiſes AB in M′ angelangt iſt, der Bogen AM der Linie AM′ gleich ſeyn. Nimmt man daher den Bogen M′A′ = AM′, ſo iſt A′ der Ort, wo ſich der Punkt A befindet, wenn der Kreis AB von A bis M′ gewälzt wird. Taf. I. Fig. 1.

Bei der Wälzung des Kreiſes AB wird der Punkt A, bis er nach A′ kommt, irgend eine krumme Linie AA′ beſchreiben, welche man die gemeine Cykloide oder Radlinie (Trochoides. *Cycloïde. Roulette*) nennt, weil ein Punkt in dem Umfange eines fortgewälzten Rades eine ähnliche Linie beſchriebe. Der wälzende Kreis AB heißt der Erzeugungskreis (Circulus generator. *Cercle générateur*), und der Punkt A deſſelben, welcher die Cykloide beſchreibt, der beſchreibende Punkt.

Kommt der Erzeugungskreis bis C, und es iſt AC dem halben Umfange AMB des erzeugenden Kreiſes gleich, ſo fällt der beſchreibende Punkt in die auf AD ſenkrechte Linie CS in S, wenn CS dem Durchmeſſer AB gleich iſt. Wird der erzeugende Kreis noch weiter fortbewegt, ſo wird der beſchreibende Punkt in D wieder in die Grundlinie fallen, wenn CD = AC, oder wenn AD dem Umfange des erzeugenden Kreiſes gleich iſt. Dieſer hat alsdann eine Umdrehung gemacht, und eine Cykloide ASD beſchrieben; auch läßt ſich einſehn, daß bei fortgeſetzter Wälzung mehrere Cykloiden beſchrieben werden können, welche einander gleich und ähnlich ſind.

Der Punkt S heißt der **Scheitel**, und A ſoll hier der Anfang der Cykloide heißen.

Zum Bogen AM = Bogen M′A′, welcher von A bis M abgewälzt iſt, gehört am Mittelpunkte G′ der Winkel A′G′M′, welcher der **Wälzungswinkel** genannt wird. Setzt man denſelben = φ, und bezeichnet zugleich dadurch denjenigen Bogen, welcher für den Halbmeſſer = 1 dieſem Winkel entſpricht, ſo iſt für A′G′ = r, der abgewälzte Bogen A′M′ oder die Linie

$$AM' = r\varphi.$$

Fällt der beſchreibende Punkt A′ in den Scheitel S, ſo wird $\varphi = \pi = 3,14159\ldots$, daher

$$AC = \pi r.$$

§. 2.

Taf. I. Fig. 1. **Aufgabe.** Durch den Anfang A, Figur 1., der Cykloide iſt auf die Grundlinie AD der Durchmeſſer AB des erzeugenden Kreiſes AMB ſenkrecht geſtellt. Für ir-

gend einen Punkt P auf dieſem Durchmeſſer ſucht man den Abſtand P A′ eines Punkts A′ in der Cykloide.

Aufloͤſung. Durch P ſei PP′ unbeſtimmt lang auf A B ſenkrecht gezogen, und der erzeugende Kreis werde in M geſchnitten. Man mache AM′ dem Bogen AM gleich, ziehe M′P′ auf AD ſenkrecht, nehme P′A′ = PM, ſo iſt A′ der geſuchte Punkt. Hievon kann man ſich leicht uͤberzeugen, wenn uͤber M′ ein erzeugender Kreis M′N beſchrieben wird, weil derſelbe alsdann deshalb durch den Punkt A′ gehen muß, weil M′P′ = AP und P′A′ = PM iſt. Nun war AM′ = Bogen AM, alſo iſt auch M′A′ = AM′, folglich nach dem vorigen §. A′ ein Punkt in der Cykloide.

Will man aus der Entfernung AP = x den Abſtand PA′ = y finden, ſo ſei der Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes AG = GB = r, alsdann iſt AP = x, der Sinusverſus, welcher zum Bogen AM gehoͤrt, alſo

Bogen $AM = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r} = AM' = PP'$.

Nach der Eigenſchaft des Kreiſes iſt ferner

$PM^2 = BP.PA = 2rx - x^2$, alſo

PM oder $P'A' = \sqrt{(2rx - x^2)}$. Aber

$y = PA' = PP' - P'A'$, daher

$$(I)\quad y = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r} - \sqrt{(2rx - x^2)}$$

Soll x und y durch den Waͤlzungswinkel $A'G'M' = AGM = \varphi$ ausgedruͤckt werden, ſo erhaͤlt man, weil der Winkel $MGP = 180° - \varphi$, alſo $\cos MGP = - \cos \varphi$ iſt,

$GP = GM . \cos MGP = - r \cos \varphi$, alſo

$x = AP = AG + GP = r - r \cos \varphi$, oder

$$(II)\ x = r\,(1 - \cos\varphi).$$

Nach bekannten trigonometriſchen Lehren iſt aber auch $1 - \cos\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$, daher erhält man

$$(III)\ x = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

Ferner iſt $AM' = r\varphi$ und
$A'P' = G'A'.\sin A'G'P' = r\sin\varphi$, daher
$y = PA' = AM' - A'P' = r\varphi - r\sin\varphi$, oder

$$(IV)\ y = r\,(\varphi - \sin\varphi).$$

§. 3.

Wollte man den Scheitel S, Figur 1., als Anfangspunkt für die Abſciſſen annehmen, ſo ſetze man $SX = x'$, $XA' = y'$, alsdann iſt $x' = 2r - x$, alſo

$$(I)\ x' = r + r\cos\varphi.$$

Da ferner $XA' = AC - PA'$ oder $y' = \pi r - y$, ſo erhält man

$$(II)\ y' = (\pi - \varphi)\,r + r\sin\varphi.$$

Nun iſt der Bogen $\pi - \varphi = \text{Arc sinvers}\,\frac{x'}{r}$, und $\sin\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{(2rx' - x'x')}$, daher auch

$$(III)\ y' = r\,\text{Arc sinvers}\,\frac{x'}{r} + \sqrt{(2rx' - x'x')}.$$

§. 4.

Aufgabe. Eine Cykloide zu zeichnen, wenn der
Taf. I. Durchmeſſer DE, Figur 1., des erzeugenden Kreiſes ge-
Fig. 1. geben iſt.

Aufloͤſung. Den halben Umfang $D\gamma E$ des erzeugenden Kreiſes trage man auf die Grundlinie von D nach C. Theile den halben Umfang $D\gamma E$ in gleiche Theile $D\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, εE, und die Linie DC in eben ſo viel gleiche Theile D, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5;

5, C; ziehe durch die Theilungspunkte α, β, γ, δ, ε, E, mit DC die Parallelen aa', bb', cc', dd', ee', ES, und auf DC ſenkrecht die Linien $1a'$, $2b'$, $3c'$, $4d'$, $5e'$, CS; nehme $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, $d'\delta' = d\delta$, $e'\varepsilon' = e\varepsilon$, ſo ſind D, α', β', γ', δ', ε', S die Punkte, durch welche man die geſuchte Cykloide ziehen kann.

Der Grund dieſes Verfahrens iſt aus dem vorigen §. einleuchtend, und es laſſen ſich hienach ſo viel Punkte in der Cykloide beſtimmen, als man beliebige gleiche Theile im halben Umfange DγE annimmt.

§. 5.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für jeden Punkt der Cykloide zu finden.

Auflöſung. Nach §. 2. II. IV. findet man $\partial x = r\partial\varphi.\sin\varphi$ und $\partial y = r\partial\varphi.(1 - \cos\varphi)$, alſo

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{tgt}\tfrac{1}{2}\varphi,$$ weil

$\sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi$ iſt.

Für den Punkt A', Figur 1., ſei A'N' die Tangente, welche den nöthigenfalls verlängerten Halbmeſſer M'N in irgend einem Punkte N' unter dem Winkel $A'N'G' = \psi$ ſchneidet. Wächſt nun x um $pq = \partial x$, und y um $A'q = \partial y$, ſo iſt im rechtwinklichten Dreiecke A'pq der Winkel $A'pq = \psi$, alſo $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt}\psi$, aber $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt}\frac{1}{2}\varphi$, daher $\psi = \frac{1}{2}\varphi$, oder der Winkel $A'N'G' = \frac{1}{2}A'G'M'$. Dies kann aber nur dann ſtatt finden, wenn der Punkt N' in die Peripherie bei N fällt, weil alsdann der Peripheriewinkel A'NG' dem halben Mit- Taf. I. Fig. 1.

telpunktswinkel A′G′M′ gleich iſt. Wenn daher M′A′N der erzeugende Kreis iſt, welcher zum beſchreibenden Punkte A′ gehört, ſo findet man die Lage der Tangente für A′, wenn man von A′ nach dem Endpunkte N des Durchmeſſers M′N die Sehne A′N zieht.

Weil die Normale auf der Tangente ſenkrecht ſteht, ſo findet man dieſe, wenn von A′ nach dem Berührungspunkte M′ die Sehne A′M′ gezogen wird, weil nur in dieſem Falle N A′M′ ein rechter Winkel iſt

Im Scheitel S läuft die Tangente mit der Grundlinie AD parallel, und im Anfangspunkte A ſteht ſie darauf ſenkrecht.

§. 6.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der Cykloide zu finden.

Auflöſung. Weil nach §. 2. II. IV.

$\partial x = r\partial\varphi . \sin\varphi$ und $\partial y = r\partial\varphi . (1 - \cos\varphi)$ iſt,

Taf. I. Fig. 1. ſo erhält man, wenn, Figur 1., der Bogen $AA' = v$ geſetzt wird,

$$\partial v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = 4r^2\partial\varphi^2 \frac{1-\cos\varphi}{2} = 4r^2\partial\varphi^2 . \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

oder

$$\partial v = 2r\partial\varphi . \sin\tfrac{1}{2}\varphi, \text{ daher}$$

$$v = 4r\int\tfrac{1}{2}\partial\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi = - 4r \cos\tfrac{1}{2}\varphi + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird $\cos\frac{1}{2}\varphi = 1$ und $v = 0$, alſo Const. $= 4r$, daher findet man die Länge des Bogens AA′ oder

$$\text{(I)}\quad v = 4r(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Für die halbe Cykloide iſt $\varphi = 180°$, alſo $\cos\frac{1}{2}\varphi = 0$, daher $v = 4r$, d. h. die halbe

Cykloide iſt dem doppelten Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes gleich.

Will man den Bogen v durch die Abſciſſe x ausdrükken, ſo iſt §. 2. (III) $x = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = 2r(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi^2)$, alſo $\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{2r - x}{2r}}$, folglich wenn dieſer Werth in (I) geſetzt wird

$$\text{(II)}\ v = 4r - 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)}.$$

Rechnet man die Länge des Bogens vom Scheitel S, und ſetzt $SA' = v'$, und die dazu gehörige Abſciſſe $SX = x'$, ſo iſt $x = 2r - x'$, und $v' = 4r - v = 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)}$, oder man findet, wenn $2r - x'$ ſtatt x geſetzt wird, die Länge des Bogens SA', oder

$$\text{(III)}\ v' = 2\sqrt{2rx'}.$$

Ferner iſt nach den Eigenſchaften der Figur $(NA')^2 = NP'.NM' = 2rx'$, alſo $NA' = \sqrt{2rx'}$, folglich

$$\text{(IV)}\ v' = 2.NA'$$

oder die doppelte Sehne NA' iſt eben ſo groß als der Bogen SA' von der Cykloide.

§. 7.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer ϱ für irgend einen Punkt A', Figur 1., der Cykloide zu beſtimmen. Taf. I. Fig. 1.

Auflöſung. Nach §. 5. iſt

$\partial x = r\partial\varphi \sin\varphi$; $\partial y = r\partial\varphi(1 - \cos\varphi)$ und $\partial v = 2r\partial\varphi \sin\frac{1}{2}\varphi$, daher, wenn man $\partial\varphi$ conſtant annimmt:

$\partial^2 x = r\partial\varphi^2 \cos\varphi$ und $\partial^2 y = r\partial\varphi^2 \sin\varphi$.

Hieraus findet man

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = -r^2 \partial \varphi^3 (1 - \cos\varphi) = -2r^2 \partial \varphi^3 \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

Nun iſt allgemein der Krümmungshalbmeſſer

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}, \text{ daher}$$

$$\varrho = \frac{8 r^3 \partial \varphi^3 \sin \frac{1}{2}\varphi^3}{-2r^2 \partial \varphi^3 \sin \frac{1}{2}\varphi^2} = -4r \sin \tfrac{1}{2}\varphi,$$

oder es iſt, weil ſich das Minuszeichen hier auf die Lage des Halbmeſſers bezieht, und anzeigt, daß ſolcher nach der Richtung $A'M'$ genommen werden muß,

$$\varrho = 4r \sin \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Im rechtwinklichten Dreiecke $A'NM'$ iſt aber $A'M' = M'N \sin A'NM$ oder $A'M' = 2r \sin \frac{1}{2}\varphi$, daher erhält man

$$\varrho = 2A'M' = 2AM.$$

Der Krümmungshalbmeſſer iſt folglich doppelt ſo groß, als die Sehne $A'M'$ im Erzeugungskreiſe.

Im Scheitel iſt der Krümmungshalbmeſſer dem doppelten Durchmeſſer des Erzeugungskreiſes gleich, und beim Anfange $A = 0$.

§. 8.

Aufgabe. Den Flächeninhalt des von der Cykloide und ihrer Grundlinie eingeſchloſſenen Raumes zu finden.

Taf. I. Fig. 1. Auflöſung. Man ziehe, Figur 1., von irgend einem Punkte A' der Cykloide die Linie $A'Q$ auf AD ſenkrecht, ſo iſt $AQ = PA' = y$, $QA' = AP = x$, und, wenn man die Fläche $AQA'A = F$ ſetzt,

$$\partial F = x \partial y = r(1 - \cos\varphi)\, r(\partial\varphi - \partial\varphi \cos\varphi)$$

§. 2. II. IV. oder

$$\partial F = r^2 \partial \varphi (1 - 2\cos\varphi + \cos\varphi^2)$$

$$= r^2 \partial \varphi (\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)$$

weil $\cos\varphi^2 = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$ iſt. Hieraus erhält man

$$F = r^2 \int \partial\varphi \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi\right)$$
$$= r^2 \left(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\right)$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil das Integral mit $\varphi = 0$ verſchwindet. Es iſt daher die Fläche $AA'Q$, oder

$$F = \tfrac{1}{4}r^2 (6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi).$$

Für die ganze Cykloide ASD wird der Winkel $\varphi = 360°$, alſo $\sin\varphi$ und $\sin 2\varphi = 0$, aber Bogen $\varphi = 2\pi$, daher iſt die Fläche

$$ASDA = 3\pi r^2.$$

Die ganze von der Cykloide und der Grundlinie eingeſchloſſene Fläche iſt daher dreimal ſo groß als der Inhalt des Erzeugungskreiſes.

§. 9.

Rechnet man die Abſciſſen vom Scheitel S, Figur 1., und ſucht den Inhalt des Abſchnitts $A'SXA' = F'$ für $SX = x'$ und $XA' = y'$, ſo erhält man aus §. 3. (III) Taf. I. Fig. I.

$$\partial y' = r\partial \text{ Arc sinvers } \frac{x'}{r} + \frac{(r - x')\,\partial x'}{\surd(2rx' - x'x')}.$$ Aber (P. A. S. 79. 33.)

$$\partial \text{ Arc sinvers } \frac{x'}{r} = \frac{\partial x'}{\surd(2rx' - x'x')},$$ daher

$$\partial y' = \frac{(2r - x')\,\partial x'}{\surd(2rx' - x'x')},$$ oder

$$x'\partial y' = \frac{(2rx' - x'x')\,\partial x'}{\surd(2rx' - x'x')} = \partial x' \surd(2rx' - x'x').$$

Nun iſt (P. A. S. 161. X.)

$$\int \partial x' \sqrt{(2rx' - x'x')}$$
$$= \tfrac{1}{2}(x'-r)\sqrt{(2rx'-x'x')} + \tfrac{1}{2}r^2 \text{Arc tgt} \frac{x'-r}{\sqrt{(2rx'-x'x')}} + \text{Const}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(r-x')\sqrt{(2rx'-x'x')} + \tfrac{1}{2}r^2 \text{Arc sinvs} \frac{x'}{r} + \text{Const} \; (*)$$

(*) Denn man ſetze $\text{Arc tgt} \frac{x-r}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \varphi$, ſo iſt $\text{tgt}\, \varphi = \frac{x-r}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$, oder $-\text{tgt}\, \varphi = \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$. Aber $\text{tgt}\,(\pi-\varphi) = -\text{tgt}\,\varphi = \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$, alſo $\pi - \varphi = \text{Arc tgt} \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$, daher $\varphi = \pi - \text{Arc tgt} \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \text{Arc tgt} \frac{x-r}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

Ferner ſetze man $\text{Arc tgt} \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \psi$, ſo iſt $\text{tgt}\, \psi = \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$. Da nun $\sin \psi = \frac{\text{tgt}\,\psi}{\sqrt{(1+\text{tgt}\,\psi^2)}} = \frac{r-x}{r} = 1 - \frac{x}{r}$ iſt, ſo wird $\frac{x}{r} = 1 - \sin\psi = \cos\text{vers}\,\psi = \text{sinvers}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \psi)$, alſo $\text{Arc sinvers} \frac{x}{r} = \tfrac{1}{2}\pi - \psi$, oder $\psi = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc sinvers} \frac{x}{r}$. Aber $\varphi = \pi - \psi$, daher $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi + \text{Arc sinvers} \frac{x}{r} = \text{Arc tgt} \frac{x-r}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

Mittelſt dieſes Werths wird der oben ſtehende Ausdruck erhalten, wenn man die beſtändige Größe $\tfrac{1}{2}\pi$ mit unter der Const. begreift. Auf einem directen Wege kann dies Integral leichter gefunden werden. Hier war nur zu zeigen, daß beide Ausdrücke gleichgeltend ſind.

und wenn für $x' = 0$ das Integral verſchwindet, Const = 0, daher

$$\int \partial x' \sqrt{(2rx' - x'x')}$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2 \text{Arc sinvs} \frac{x'}{r} - \tfrac{1}{2}(r - x')\sqrt{(2rx' - x'x')},$$

Das Element der Fläche iſt

$$\partial F = y'\partial x' = \partial(x'y') - x'\partial y', \text{ daher}$$

$$F = x'y' - \int x'\partial y' = x'y' - \int \partial x' \sqrt{(2rx' - x'x')}$$

oder

$$F = x'y' - \tfrac{1}{2}r^2 \text{Arc sinvs} \frac{x'}{r} + \tfrac{1}{2}(r - x')\sqrt{(2rx' - x'x')}$$

oder man findet, wenn man ſtatt y' ſeinen Werth (§. 3. III.) ſetzt, den halben Abſchnitt der Cykloide, vom Scheitel an gerechnet

$$F = r(x' - \tfrac{1}{2}r) \text{Arc sinvs} \frac{x'}{r} + \tfrac{1}{2}(x' + r)\sqrt{(2rx' - x'x')}$$

oder auch

$$F = (r - \tfrac{1}{2}x')\sqrt{(2rx' - x'x')} + (x' - \tfrac{1}{2}r)y'.$$

§. 10.

Der beſchreibende Punkt iſt bisher im Erzeugungskreiſe angenommen worden; allein man kann denſelben auch außerhalb des Erzeugungskreiſes, etwa in O, Figur 2., annehmen, und dabei vorausſetzen, daß ſich der beſchreibende Punkt O mit dem wälzenden oder erzeugenden Kreiſe zugleich bewegt, ſo wird derſelbe bei der Fortwälzung des Kreiſes AB auf der Grundlinie AD, eine verkürzte (curtata) oder verſchlungene Cykloide $O\alpha'\beta'f'$ beſchreiben. Taf. I. Fig. 2.

Ganz auf eine ähnliche Art laſſen ſich die Eigenſchaften der verkürzten Cykloide wie bei der gemeinen bisher abgehandelten entwickeln. Wird aus dem Mittelpunkte des

Erzeugungskreiſes durch den beſchreibenden Punkt O ein Kreis O γ V O geſchlagen, ſo heißt dieſer der beſchreibende Kreis, und in Beziehung auf denſelben läßt ſich eben ſo jeder Punkt in der verkürzten Cykloide finden, wie dies von der gemeinen in Beziehung auf den Erzeugungskreis §. 2. erwieſen iſt.

Hierauf gründet ſich das Verfahren, die verkürzte Cykloide zu zeichnen. Es ſei AB der erzeugende und OV der beſchreibende Kreis. Man ziehe O6 mit der Grundlinie AD parallel, nehme O6 ſo groß wie den halben Umfang des Erzeugungskreiſes AB; theile den halben Umfang des beſchreibenden Kreiſes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile $O\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, εV, und in eben ſo viel gleiche Theile O, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; 5, 6 theile man die Linie O6. Durch die Theilungspunkte α, β, γ, δ, ε ziehe man mit O6 die Parallelen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, cc', dd', ee', Vf', und darauf ſenkrecht die Linien $1a'$, $2b'$, $3c'$, $4d'$, $5e'$, $6f'$, nehme $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$ u. ſ. w., ſo ſind O, α', β', γ', δ', ε', f' Punkte in der Cykloide, durch welche man ſolche beſchreiben kann.

§. 11.

Die Gleichung für die verkürzte Cykloide wird auf ähnliche Art wie §. 2. für die gemeine gefunden. Mit
Taf. I. Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ſei, Figur 3.,
Fig. 3. $GA = GB = GM = r$ der Halbmeſſer des Erzeugungskreiſes, $Ga = Gb = Gm = r'$ der Halbmeſſer des beſchreibenden Kreiſes, und der Mittelpunkt G ſei bis G' fortgerückt, ſo iſt, wenn a als Anfangspunkt der

Abſciſſen angenommen wird, für $aP = x$ die Ordinate $Pa' = y$, und der

$$\text{Bogen } AM = AM' = PP' = r\varphi. \text{ Ferner}$$

$$\text{Bogen } am = r' \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r'}, \text{ daher}$$

$$\text{Bogen } AM = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r'} = PP'$$

$$Pm^2 = bP . Pa = (2r' - x)x, \text{ alſo}$$

$$Pm = P'a' = \sqrt{(2r'x - x^2)}$$

$$y = Pa' = PP' - P'a', \text{ folglich}$$

$$\text{(I) } y = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r'} - \sqrt{(2r'x - x^2)}$$

Ferner iſt $GP = - r' \cos\varphi$,

$$x = aP = aG + GP, \text{ folglich}$$

$$\text{(II) } x = r'(1 - \cos\varphi) = 2r' \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

Endlich erhält man noch

$$y = Pa' = PP' - P'a', \text{ daher}$$

$$\text{(III) } y = r\varphi - r' \sin\varphi.$$

Wird $y = 0$, ſo muß die krumme Linie die Axe ab ſchneiden. Dies erfolgt, wenn nach III.

$$r\varphi = r' \sin\varphi$$

iſt. Nun wird für $\varphi = 0$ auch $\sin\varphi = 0$, daher ſchneidet die Kurve die Axe im Anfangspunkte a. Wäre F der zweite Durchſchnittspunkt, und man zieht FH auf ab ſenkrecht, und zum Punkte H den Halbmeſſer GH, ſo wird der Erzeugungskreis in K geſchnitten. Gehört nun zum Bogen AK der Winkel φ, ſo iſt

$$r\varphi = \text{Bogen } AK \text{ und } r' \sin\varphi = HF.$$

Es muß daher im Durchſchnittspunkte F der Bogen AK der Sehne FH gleich ſeyn. Uebrigens iſt F für die verkürzte Cykloide ein Doppelpunkt (Punctum duplex).

§. 12.

Taf. I. Fig. 2. Wenn hingegen der beſchreibende Punkt O′, Figur 2., innerhalb des Erzeugungskreiſes DE fällt, ſo wird bei der Fortwälzung dieſes Kreiſes von D nach A eine geſtreckte oder verlängerte Cykloide O′β′c′ beſchrieben. Bei dieſer iſt der Halbmeſſer G′O′ des beſchreibenden Kreiſes kleiner als der Halbmeſſer G′D des Erzeugungskreiſes.

Die Aufzeichnung der geſtreckten Cykloide geſchieht nach eben den Grundſätzen, wie bei der verſchlungenen oder gemeinen, daher die Zeichnung Figur 2. ohne weitere Erklärung zureichend iſt. Noch iſt zu bemerken, daß ASD die gemeine Cykloide iſt, welche bei einerlei Grundlinie und einerlei Erzeugungskreis ſowohl die verſchlungene als auch die geſtreckte Cykloide ſchneidet.

Die Gleichungen für die verlängerte Cykloide findet man eben ſo wie im vorigen §., wenn man den Anfangspunkt der Abſciſſen im Punkte O′ annimmt, nur daß hier r′ kleiner als r iſt.

Um die Wendungspunkte einer krummen Linie zu finden, darf man nur $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ ſetzen. Nun iſt

$\partial x = r' \partial \varphi \sin \varphi$, alſo

$\partial^2 x = r' \partial \varphi^2 \cos \varphi + r' \partial^2 \varphi \sin \varphi$.

Wird ∂x conſtant angenommen, ſo iſt $\partial^2 x = 0$, alſo $r' \partial \varphi^2 \cos \varphi + r' \partial^2 \varphi \sin \varphi = 0$, daher $\partial^2 \varphi = - \partial \varphi^2 \cot \varphi$.

Ferner erhält man

$\partial y = r \partial \varphi - r' \partial \varphi \cos \varphi$, alſo

$\partial^2 y = r \partial^2 \varphi - r' \partial^2 \varphi \cos \varphi + r' \partial \varphi^2 \sin \varphi$

oder $- \partial \varphi^2 \cot \varphi$ ſtatt $\partial^2 \varphi$ geſetzt, giebt

$$\partial^2 y = (r' \sin \varphi + r' \cos \varphi \cot \varphi - r \cot \varphi)\, \partial \varphi^2$$

daher

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{r' \sin \varphi + r' \cos \varphi \cot \varphi - r \cot \varphi}{r' r' \sin \varphi^2}.$$

Für $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ wird

$$r' \sin \varphi + r' \cos \varphi \cot \varphi = r \cot \varphi \text{ oder}$$

$$r \cos \varphi = r' (\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2) = r'$$

daher muß, wenn K, Figur 2., der Wendungspunkt iſt, für denſelben

$$r \cos \varphi = r'$$

ſeyn. Durch den Anfangspunkt O′ werde O′F auf die Abſciſſenaxe O′E ſenkrecht gezogen, und ſchneide den Erzeugungskreis in F. Man ziehe G′F, wodurch der beſchreibende Kreis in H geſchnitten wird. Setzt man alsdann, daß der Bogen O′H dem Winkel φ entſpricht, ſo iſt $G'O' = r \cos \varphi$; aber auch $G'O' = r'$, alſo iſt H der Punkt im beſchreibenden Kreiſe, welcher mit dem Wendungspunkte zuſammengehört. Zieht man daher HK mit O′F parallel, ſo muß der Wendungspunkt in dieſe Linie fallen.

Weil $\cos \varphi = \frac{r' - x}{r'}$ iſt, (§. 11. II.) ſo erhält man $r' = r \cos \varphi = \frac{r (r' - x)}{r'}$, und hieraus die Abſciſſe, welche dem Wendungspunkte entſpricht, oder

$$x = \frac{r' (r - r')}{r}$$

auch verhält ſich $r' : r = r - r' : x$.

Zweiter Abſchnitt.

Von der Epicykloide und Hypocykloide.

I. Die gemeine Epicykloide.

§. 13.

Taf. I. Fig. 4. Auf einem unbeweglichen Kreiſe $AM'A'''$, Figur 4., befinde ſich in derſelben Ebene ein zweiter Kreis AMB, welcher auf $AM'A'''$ fortgewälzt werde, ſo wird, wenn AMB in die Lage $A'M'L$ kommt, irgend ein Punkt A im Umfange des Kreiſes AMB eine krumme Linie AA' beſchreiben, welche man die gemeine **Epicykloide** (*Roulette extérieure*) nennt.

Der unbewegliche oder ruhende Kreis AA''' heißt der **Grundkreis**, die **Grundlinie** oder **Baſis**. Der bewegte Kreis AMB wird der **erzeugende** oder **beſchreibende** (Circulus generator. *Cercle générateur*) genannt, und derjenige Punkt A im Umfange des erzeugenden Kreiſes, welcher die Epicykloide AA' beſchreibt, der **beſchreibende Punkt** (*Point décrivant*).

Der beſchreibende Punkt falle bei A in den Grundkreis, und der Erzeugungskreis AB werde auf AA''' bis M' gewälzt, ſo muß von dem erzeugenden Kreiſe, wenn ſolcher bis M' kommt, ein Bogen $AM = AM'$ abgewälzt ſeyn, und der Punkt M muß alsdann in M' fallen. Auch wird der beſchreibende Punkt A nunmehr in A' liegen, wenn $M'A' = M'A = AM$ genommen wird.

Der Winkel M′G′A′, welcher am Mittelpunkte G′ des erzeugenden Kreiſes zum abgewälzten Bogen M′A′ gehört, heißt der **Wälzungswinkel**, welcher hier durchgängig $= \varphi$ geſetzt werden ſoll. Der Winkel ACM′ am Grundkreiſe, deſſen Bogen AM′ dem Bogen M′A′ gleich iſt, kann hier der **Grundwinkel** heißen, und durch φ' ausgedrückt werden. Wird der Wälzungswinkel $\varphi = 180°$, ſo iſt der Bogen AB″ der halben Peripherie des erzeugenden Kreiſes gleich, und wenn der Bogen AB″A‴ des Grundkreiſes dem ganzen Umfange des erzeugenden Kreiſes gleich iſt, ſo hat dieſer eine **Umdrehung** gemacht. So oft nun der Umfang des erzeugenden Kreiſes im Umfange des Grundkreiſes enthalten iſt, ſo viel Umdrehungen wird der Erzeugungskreis machen, bis er einen **Umlauf** um den Grundkreis vollendet hat, oder wenn der Halbmeſſer des Grundkreiſes CA = a und der Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes = r geſetzt wird, ſo iſt $\frac{a}{r}$ die Zahl der Umdrehungen des erzeugenden Kreiſes, welche auf jeden Umlauf kommen. Iſt $\frac{a}{r}$ eine ganze Zahl, ſo kommt der erzeugende Punkt A jedesmal wieder auf dieſelbe Stelle, wo er abgewälzt worden iſt; außerdem entſtehen aber über dem Grundkreiſe mehrere Epicykloiden, welche ſich durchſchneiden.

Werden die Halbmeſſer a, r durch ganze Zahlen ausgedrückt, welche keinen gemeinſchaftlichen Faktor haben, und man ſetzt den Umfang des Grundkreiſes = A, des erzeugenden Kreiſes = R, ſo verhält ſich

$$A : R = a : r, \text{ alſo iſt } a . R = r . A$$

d. h. a Umfänge des erzeugenden Kreiſes ſind = r Um-

fänge des Grundkreiſes, oder wenn der Grundkreis ſich a mal umdreht, wird er r Umläuſe gemacht haben, und nur nach r Umläufen kann der erzeugende Punkt wieder an derſelben Stelle des Grundkreiſes eintreffen.

Sind zwei Bogen verſchiedener Kreiſe gleich lang, ſo verhalten ſich die zugehörigen Mittelpunktswinkel umgekehrt wie die Halbmeſſer. Nun iſt der Bogen $A'M' = AM'$, daher $\varphi : \varphi' = a : r$, man erhält daher aus dem gegebenen Wälzungswinkel φ den Grundwinkel

$$\varphi' = \frac{r}{a}\,\varphi.$$

§. 14.

Taf. I. Fig. 4. Aufgabe. Die Entfernung eines Punktes N, Figur 4., vom Mittelpunkte C des Grundkreiſes iſt gegeben, man ſoll einen Punkt A' in der Epicykloide durch Zeichnung finden, welcher eben ſo weit von C entfernt iſt.

Auflöſung. Es ſei A der Anfangspunkt der Epicykloide, und auf der durch A gezogenen Linie CB die Weite CN gegeben, ſo daß der Punkt N innerhalb des Durchmeſſers AB vom erzeugenden Kreiſe BMA fällt. Durch N beſchreibe man mit dem Halbmeſſer CN den Bogen NMN', nehme $AM' = AM$; ziehe durch M' die Linie CN', und nehme $N'A' = NM$, ſo iſt A' ein Punkt in der Epicykloide, deren Anfangspunkt in A liegt.

Den Grund dieſes Verfahrens wird man leicht einſehn, wenn über dem gefundenen Punkt M' der erzeugende Kreis M'A'L beſchrieben wird, alsdann iſt $M'N' = AN$, alſo $M'A' = AM$, daher A' der Ort, in welchen der Punkt A gelangen muß, wenn der erzeugende Kreis über M' ſteht.

§. 15.

Zuſatz. Durch die vorſtehende Aufgabe erhält man ein leichtes Mittel, für jeden gegebenen Fall eine Epicykloide zu zeichnen, weil man für jeden Abſtand vom Mittelpunkte C des Grundkreiſes, einen Punkt in der Epicykloide angeben kann. Es ſei daher AC, Figur 4., der Halbmeſſer des Grundkreiſes, und der Bogen A5 auf dem Grundkreiſe eben ſo groß, als der halbe Umfang $A\beta B$ des erzeugenden Kreiſes. Man theile den halben Umfang $A\beta B$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δB, und in eben ſo viel gleich große Theile A 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5 werde A 5 getheilt. Aus C ziehe man durch die Punkte α, β, γ, δ die Bogen aa', bb', cc', dd', auch die Linien $1a'$, $2b'$, $3c'$, $4d'$; nehme $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, $d'\delta' = d\delta$, ſo ſind α', β', γ', δ' die geſuchten Punkte in der durch den Anfang A gehenden Epicykloide, deren man noch weit mehr finden könnte, wenn der halbe Umfang des erzeugenden Kreiſes in kleinere Theile eingetheilt worden wäre.

§. 16.

Für irgend einen Punkt A' in der Epicykloide, Figur 4., ſei $CP = x$, die darauf ſenkrechte $PA' = y$ und $CA' = z$. Man ziehe $G'Q$ mit $A'P$ parallel, und $A'R$ auf $G'Q$ ſenkrecht, ſo iſt mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung der Winkel Taf. I. Fig. 4.

$$CG'Q = 90^\circ - \varphi'$$

$$RG'A' = CG'A' - CG'Q = \varphi - (90^\circ - \varphi') = \varphi + \varphi' - 90^\circ,$$

daher $\sin RG'A' = -\cos(\varphi + \varphi')$

und $\cos RG'A' = \sin(\varphi + \varphi')$.

Im Dreiecke $A'G'R$ iſt

$$A'R = A'G \sin RG'A' = - r \cos(\varphi + \varphi')$$

$$G'R = A'G \cos RG'A' = r \sin(\varphi + \varphi')$$

und im Dreiecke $CG'Q$

$$QG' = CG' \sin G'CQ = (a + r) \sin \varphi'$$

$$CQ = CG' \cos G'CQ = (a + r) \cos \varphi'.$$

Ferner iſt

$$x = CP = CQ + A'R \text{ und}$$

$$y = PA' = QG' - G'R, \text{ alſo}$$

$$\text{(I) } x = (a + r) \cos \varphi' - r \cos(\varphi + \varphi')$$

$$\text{(II) } y = (a + r) \sin \varphi' - r \sin(\varphi + \varphi').$$

Im Dreiecke $A'G'C$ iſt $A'C = z$, daher $z^2 = x^2 + y^2$

$$\text{(III) } z^2 = (a + r)^2 + r^2 - 2r(a + r) \cos \varphi.$$

Soll nun x durch y oder z ausgedrückt werden, ſo muß $\varphi' = \frac{r}{a} \varphi$ ſo beſchaffen ſeyn, daß $\frac{r}{a}$ rational wird.

Werden die gefundenen Ausdrücke (I. II.) differenziirt, ſo iſt

$$\partial x = -(a + r) \partial \varphi' \sin \varphi' + r(\partial \varphi + \partial \varphi') \sin(\varphi + \varphi')$$

oder, weil $\varphi' = \frac{r}{a} \varphi$ iſt,

$$\partial x = \frac{ar + r^2}{a} \partial \varphi [\sin(\varphi + \varphi') - \sin \varphi']$$

$$\partial y = \frac{ar + r^2}{a} \partial \varphi [\cos \varphi' - \cos(\varphi + \varphi')].$$

Beide Ausdrücke quadrirt und zuſammen addirt giebt

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{2r^2(a+r)^2}{a^2} \partial \varphi^2 [1 - \sin \varphi' \sin(\varphi + \varphi') - \cos \varphi' \cos(\varphi + \varphi')]$$

oder man erhält, weil

$$\sin \varphi' \sin(\varphi + \varphi') + \cos \varphi' \cos(\varphi + \varphi') = \cos \varphi$$

und $1 - \cos \varphi = 2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$ iſt,

(IV) $\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{4r^2(a+r)^2}{a^2} \partial \varphi^2 \sin \frac{1}{2}\varphi^2 = \left[\frac{2r(a+r)}{a} \partial \varphi \sin \frac{1}{2}\varphi\right]^2$

Ferner findet man aus (III)

$$(V)\quad \partial z = \frac{r(a+r)\,\partial\varphi \sin\varphi}{z}.$$

§. 17.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für jeden Punkt der Epicykloide zu finden.

Auflöſung. Es ſei ST, Figur 4., die Tangente für den Punkt A' und der Bogen $AA' = v$. Wächſt v um $A'p = \partial v$, und man zieht $A'q$ auf $A'C$ und pq auf $A'q$ ſenkrecht, ſo iſt $pq = \partial z$ für $A'C = z$. Aber Taf. I. Fig. 4.

$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{2r(a+r)}{a} \partial\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi$

§. 16. IV. und

$\partial z = \frac{r(a+r)}{z} \partial\varphi \sin\varphi = \frac{2r(a+r)}{z} \partial\varphi \sin\frac{1}{2}\varphi \cos\frac{1}{2}\varphi$

daher

$$\sin pA'q = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{a \cos \frac{1}{2}\varphi}{z}.$$

Man nehme an, daß $A'V$ auf ST ſenkrecht ſei, ſo wäre $A'V$ die Normale für A', und weil $A'q$ auf $A'C$ ſenkrecht iſt, ſo wird der Winkel $pA'q = CA'V$, alſo auch

$$\sin CA'V = \frac{a \cos \frac{1}{2}\varphi}{z}.$$

Wird nun die Sehne $A'M'$ gezogen, ſo iſt, weil $G'A' = G'M' = r$, der Winkel $G'M'A' = 90° - \frac{1}{2}\varphi$, alſo $A'M'C = 180° - (90° - \frac{1}{2}\varphi) = 90° + \frac{1}{2}\varphi$, daher $\sin A'M'C = \cos\frac{1}{2}\varphi$.

Nun verhält ſich im Dreiecke $A'M'C$

$A'C : CM' = \sin A'M'C : \sin CA'M'$, oder

$z : a = \cos\frac{1}{2}\varphi : \sin CA'M'$. Es iſt daher

$\sin CA'M' = \frac{a \cos \frac{1}{2}\varphi}{z}$, folglich

$\sin CA'V = \sin CA'M'$, alſo fällt A'V in A'M oder die zum Punkte A' gehörige Normale muß durch den Berührungspunkt M' beider Kreiſe gehen.

Weil die Normale M'A' auf der Tangente A'T ſenkrecht ſteht, ſo erhält man die Lage der Tangente, wenn von A' nach dem Endpunkte L des Durchmeſſers M'L die Linie A'L gezogen wird, weil nur dann die beiden Linien M'A', A'T einen rechten Winkel einſchließen.

Im Anfangspunkte A geht die Tangente durch den Mittelpunkt C des Grundkreiſes, und die Normale iſt eine Tangente dieſes Kreiſes.

Im Scheitel A'' ſteht die Tangente ſenkrecht auf dem verlängerten Halbmeſſer CB'' des Grundkreiſes, und die Normale geht durch den Mittelpunkt C deſſelben.

§. 18.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der Epicykloide zu finden.

Taf. I. Fig. 4. Aufloͤſung. Der Bogen AA', Figur 4., ſei $= v$ und $A'p = \partial v$, ſo iſt §. 16. IV.

$$\partial v = \frac{2r(a+r)}{a} \partial\varphi \sin \tfrac{1}{2}\varphi, \text{ alſo}$$

$$v = \frac{2r(a+r)}{a}\int \partial\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi = -\frac{4r(a+r)}{a}\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird $\cos\frac{1}{2}\varphi = 1$, alſo $\text{Const.} = \frac{4r(a+r)}{a}$, daher erhält man den Bogen

$$v = \frac{4r(a+r)}{a}(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Wird

Wird der Wälzungswinkel $\varphi = 180°$, ſo iſt $\cos \frac{1}{2} \varphi = 0$, wenn daher der erzeugende Kreis eine halbe Umdrehung gemacht hat, ſo findet man die Länge AA'' der halben Epicykloide

$$v = \frac{4r(a+r)}{a}.$$

Für eine ganze Umdrehung iſt $\varphi = 360°$, alſo $\cos \frac{1}{2} \varphi = -1$, daher die Länge der ganzen Epicykloide

$$v = \frac{8r(a+r)}{a}.$$

Wäre in dieſem Falle $a = r$, ſo iſt $v = 16r$.

§. 19.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer für jeden Punkt der Epicykloide zu finden.

Auflöſung. Man ſetze $\frac{r(a+r)}{a} = A$,
$\sin(\varphi + \varphi') - \sin\varphi' = V$ und $\cos(\varphi + \varphi') - \cos\varphi' = W$
ſo iſt §. 16.
$\partial x = A \partial \varphi . V$ und $\partial y = - A \partial \varphi . W$.

Nimmt man $\partial \varphi$ conſtant, ſo wird
$\partial^2 x = A \partial \varphi \partial V$ und $\partial^2 y = - A \partial \varphi \partial W$, alſo
$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = A^2 \partial \varphi^2 (V \partial W - W \partial V)$.
Aber
$\partial V = \partial \varphi \left[\cos(\varphi + \varphi') + \frac{r}{a} W\right]$ und
$\partial W = - \partial \varphi \left[\sin(\varphi + \varphi') + \frac{r}{a} V\right]$, daher
$V \partial W - W \partial V$
$= - \partial \varphi \left[\frac{r}{a}(V^2 + W^2) + V \sin(\varphi + \varphi') + W \cos(\varphi + \varphi')\right]$
oder wenn man für V und W die angenommenen Werthe ſetzt und abkürzt

$$V\partial W - W\partial V = -\frac{2r+a}{a}(1-\cos\varphi)\partial\varphi,$$ daher

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = -\frac{2r+a}{a}A^2(1-\cos\varphi)\partial\varphi^3.$$

Bezeichnet ϱ den Krümmungshalbmeſſer, ſo iſt ganz allgemein

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y}.$$ Da nun §. 17.

$$\partial v^3 = 8A^3\partial\varphi^3\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3 = 4A^3\partial\varphi^3\sin\tfrac{1}{2}\varphi(1-\cos\varphi),$$

ſo erhält man

$$\varrho = \frac{4A^3\partial\varphi^3\sin\frac{1}{2}\varphi(1-\cos\varphi)}{-\frac{2r+a}{a}A^2(1-\cos\varphi)\partial\varphi^3} = -\frac{4aA\sin\frac{1}{2}\varphi}{2r+a}$$

und weil ſich das Minuszeichen hier lediglich auf die Lage des Krümmungshalbmeſſers bezieht, ſo erhält man ohne dieſe Rückſicht den Krümmungshalbmeſſer

$$\text{(I)}\quad \varrho = \frac{4r(a+r)}{2r+a}\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Für den Anfang der Epicykloide in A, Figur 4., iſt $\varphi = 0$, alſo $\sin\frac{1}{2}\varphi = 0$, daher

$$\varrho = 0.$$

Im Scheitel bei A'' iſt $\varphi = 180°$, alſo $\sin\frac{1}{2}\varphi = 1$, daher

$$\text{(II)}\quad \varrho = \frac{4r(a+r)}{2r+a}.$$

Für $a = \infty$ wird der Grundkreis eine grade Linie, und $\varrho = 4r\sin\frac{1}{2}\varphi$, wie §. 6. bei der Cykloide.

§. 20.

Taf. I. Fig. 4. Zuſatz. Man ſetze die Sehne $A'M' = t$, ſo iſt im rechtwinklichten Dreiecke $M'A'L$ der Winkel $A'LM' = \frac{1}{2}\varphi$, daher $M'A' = t = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$. Dieſen Werth in die Gleichung (I) geſetzt, ſo erhält man

den Krümmungshalbmeſſer durch die Sehne t ausgedrückt, oder

$$(I)\ \varrho = \frac{2(a+r)}{2r+a}\cdot t.$$

Für a = r wird

$$\varrho = \tfrac{4}{3}t$$

und für einen unendlich großen Erzeugungskreis wird der Halbmeſſer r = ∞, alſo

$$\varrho = t.$$

Für a = ∞ iſt $\varrho = 2t$, wie bei der Cykloide §. 7.

Wollte man den Krümmungshalbmeſſer durch den Abſtand CA′ = z ausdrücken, ſo iſt §. 16. III.

$\cos\varphi = \frac{(a+r)^2 + r^2 - z^2}{2r(a+r)}$, und hieraus

$1 - \cos\varphi = \frac{z^2 - a^2}{2r(a+r)}$. Aber nach bekannten Lehren iſt

$\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$ daher $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{4r(a+r)}}$

Wird dieſer Werth ſtatt $\sin\frac{1}{2}\varphi$ in die Gleichung (I) des vorhergehenden §. geſetzt, ſo erhält man

$$(II)\ \varrho = \frac{2\sqrt{[r(a+r)(z+a)(z-a)]}}{2r+a}.$$

Wäre r = ∞, ſo wird $\varrho = \frac{2\sqrt{[r^2(z+a)(z-a)]}}{2r}$,

oder $\varrho = \sqrt{(z^2 - a^2)}$.

§. 21.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ACA′, Figur 4., zu finden, welche zwiſchen der Epicykloide AA′, dem Halbmeſſer AC und dem verlängerten Halbmeſſer CA′ liegt. Taf. I. Fig. 4.

Auflöſung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ſetze man den Inhalt der Fläche ACA′ = F

ſo iſt, wenn $AA' = v$, $A'p = \partial v$ und $pq = \partial z$ geſetzt wird, $A'q = \sqrt{(\partial v^2 - \partial z^2)}$,

alſo

$$\partial F = \tfrac{1}{2} z . A'q = \tfrac{1}{2} z \sqrt{(\partial v^2 - \partial z^2)} = \tfrac{1}{2} \partial v \sqrt{\left(z^2 - \frac{z^2 \partial z^2}{\partial v^2}\right)}$$

Nun iſt §. 16. (IV) $\tfrac{1}{2} \partial v = \frac{r(a+r)}{a} \partial \varphi \sin \tfrac{1}{2} \varphi$,

und §. 17.

$\frac{z^2 \partial z^2}{\partial v^2} = a^2 \cos \tfrac{1}{2} \varphi^2 = a^2 - a^2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$, und §. 20.

$z^2 - a^2 = 4r(a+r) \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$, alſo

$z^2 = 4r(a+r) \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 + a^2$, daher

$$z^2 + \frac{z^2 \partial z^2}{\partial v^2} = 4r(a+r) \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 + a^2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$$

$$= (a+2r)^2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2, \text{ folglich}$$

$$\partial F = \frac{r(a+r)(a+2r)}{a} \partial \varphi \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 = \frac{r(a+r)(a+2r)}{2a} \partial \varphi (1 - \cos \varphi)$$

und hieraus, weil

$\int \partial \varphi (1 - \cos \varphi) = \text{Arc}\, \varphi - \sin \varphi$, ſo iſt die Fläche

$$F = \frac{r(a+r)(a+2r)}{2a} (\text{Arc}\, \varphi - \sin \varphi)$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil φ mit F verſchwindet.

Für $\varphi = \pi$ iſt $\sin \varphi = 0$, und der Punkt A' fällt in den Scheitel A'', man findet daher für die halbe Epicykloide den Raum ACA'', oder

$$F = \frac{\pi r(a+r)(a+2r)}{2a}.$$

II. Die verkürzte Epicykloide.

§. 22.

Anſtatt den beſchreibenden Punkt im Umfange des erzeugenden Kreiſes AB, Figur 5., anzunehmen, kann man denſelben in O außerhalb dieſes Kreiſes ſetzen. Wird nun mit dem Halbmeſſer GO der Kreis OβQMO beſchrieben, ſo iſt dieſes der beſchreibende, und AoBA der erzeugende oder wälzende Kreis. Bei der Fortwälzung des erzeugenden Kreiſes auf dem Grundkreiſe Am′M′ beſchreibt der Punkt O eine krumme Linie OoGO′O″, welche eine verkürzte (curtata) oder verſchlungene Epicykloide heißt. Taf. I. Fig. 5.

Kommt der beſchreibende Punkt von O nach O′, und man ſetzt den Wälzungswinkel $CG'O' = \varphi$, den Grundwinkel $GCG' = \varphi'$, $AC = a$, $GO = b$, $GA = r$, ſo iſt wie §. 13. der Grundwinkel

$$\varphi' = \frac{r}{a}\,\varphi.$$

Auch läßt ſich eben ſo wie §. 14., wenn die Entfernung eines Punkts N von C gegeben iſt, der zugehörige Punkt O′ in der verkürzten Epicykloide durch Zeichnung finden, wenn man aus C den Bogen NN′ zieht, Am′ = Am nimmt; durch C und m′ die Linie CN′ zieht, und N′O′ = NM macht, ſo iſt O′ der geſuchte Punkt.

Dieſe Eigenſchaft kann leicht zum Zeichnen der verkürzten Epicykloiden angewandt werden. Denn man nehme auf dem Grundkreiſe AB′Z den Bogen AB′ eben ſo groß, als den halben Umfang des erzeugenden Kreiſes

AC, ziehe durch den Endpunkt B′ die Linie CX′, theile den halben Umfang des beſchreibenden Kreiſes OQ in mehrere gleiche Theile $O\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δQ, und ziehe durch die Theilungspunkte O, α, β, γ, δ, Q die Bogen O 5, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, Cc′, dd′, QX′; theile ferner den Bogen O 5 ebenfalls in fünf gleiche Theile O, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5, und ziehe durch die Theilungspunkte von C aus die Linien 1a′, 2b′, 3c′, 4d′, ſo erhält man die Punkte α', β', γ', δ' in der verkürzten Epicykloide, wenn $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, $d'\delta' = d\delta$ genommen werden.

§. 23.

Taf. I. Fig. 5. Auf CQ, Figur 5., ziehe man O′P ſenkrecht, und ſetze CP = x, PO′ = y und CO′ = z, ſo erhält man auf eine ähnliche Art wie §. 16.

$$x = (a + r)\cos\varphi' - b\cos(\varphi + \varphi')$$
$$y = (a + r)\sin\varphi' - b\sin(\varphi + \varphi')$$
$$z^2 = (a + r)^2 + b^2 - 2b(a + r)\cos\varphi$$

und es läßt ſich leicht einſehn, daß man zur Beſtimmung der Normale O′M′ und Tangente ST ähnliche Reſultate wie §. 17. erhält, und daß überhaupt die übrigen Eigenſchaften der verkürzten Epicykloide eben ſo wie bei der gemeinen gefunden werden können.

III. Die geſtreckte Epicykloide.

§. 24.

Fig. 6. Fällt der beſchreibende Punkt O, Figur 6., innerhalb des erzeugenden oder wälzenden Kreiſes AB, und derſelbe beſchreibt durch die Umdrehung des erzeugenden Kreiſes

AB auf dem Grundkreiſe AM′ die Linie AO′O″, ſo iſt dieſe eine geſtreckte oder verlängerte (elongata) Epicykloide.

Wenn der Mittelpunkt G des erzeugenden Kreiſes nach G′ kommt, und man ſetzt den Wälzungswinkel CG′O′ = φ, den Grundwinkel GCG′ = φ', AC = a, GO = b, GA = r, ſo iſt hier ebenfalls

$$\varphi' = \frac{r}{a}\varphi$$

und man erhält, um die geſtreckte Epicykloide zu zeichnen, ähnliche Reſultate, wie bei den vorhergehenden Unterſuchungen, daher die Zeichnungsart um ſo weniger näher beſchrieben werden darf, weil ſolche durch die Anſicht der ſechsten Figur ſchon hinlänglich erläutert iſt. Uebrigens iſt durch die Linie X′XX″ eine verkürzte, durch Y′YY″ eine geſtreckte, und durch Z′ZZ″ eine gemeine Epicykloide dargeſtellt.

Auch in Abſicht der Normale O′m′ und der Tangente ST gilt daſſelbe, was ſchon bei der verkürzten Epicykloide erinnert iſt.

IV. Die Hypocykloide.

§. 25.

Wälzt ſich der erzeugende Kreis nicht außerhalb um den Grundkreis, ſondern mit dieſem in einerlei Ebene innerhalb deſſelben, und man nimmt im Umfange des Erzeugungskreiſes AB, Figur 7., einen beſchreibenden Punkt A an, ſo wird bei der Fortwälzung innerhalb des Grundkreiſes AM′ der Punkt A eine krumme Linie AA′Z be- Taf. II. Fig. 7.

ſchreiben, welche man die gemeine Hypocykloide nennt. Liegt der beſchreibende Punkt A nicht im Umfange, ſondern außerhalb des erzeugenden Kreiſes, ſo entſtehet eine verkürzte, und wenn A innerhalb dieſes Kreiſes liegt, eine geſtreckte Hypocykloide. Hier wird nur von der gemeinen die Rede ſeyn, weil ſich die Eigenſchaften der übrigen eben ſo leicht ableiten laſſen. Zuweilen pflegt man auch die Hypocykloiden innere Epicykloiden (*Roulette intérieure*) zu nennen.

Der Mittelpunkt G des Erzeugungskreiſes ſei von G bis G′ gelangt, und der beſchreibende Punkt, welcher in A mit dem Grundkreiſe zuſammen fiel, nach A′, ſo iſt der abgewälzte Bogen M′A′ = AM, und A′G′M′ = φ der Wälzungswinkel, wozu der Grundwinkel ACM′ = φ' gehört.

Eben ſo wie §. 13. iſt auch hier, wenn AC = a und GA = r geſetzt wird

$$\varphi' = \frac{r}{a}\varphi \text{ oder } \varphi = \frac{a}{r}\varphi'.$$

§. 26.

Taf. II. Fig. 7. In der Linie AC, Figur 7., ſei ein Punkt N gegeben, ſo läßt ſich leicht ein Punkt A′ der Hypocykloide finden, welcher eben ſo weit von C abſteht, wenn man aus C den Bogen NN′ beſchreibt, AM′ auf dem Grundkreiſe dem Bogen AM gleich macht, und NM von N′ nach A′ trägt, ſo iſt A der geſuchte Punkt, welches ſich eben ſo wie §. 14. beweiſen läßt.

Hieraus folgt ein leichtes Verfahren zum Zeichnen der Hypocykloide. Man theile den halben Umfang des erzeugenden Kreiſes in mehrere gleiche Theile Aα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$,

γB, ziehe aus C durch die Theilungspunkte A, α, β, γ, B die Bogen aa', bb', cc', $B\delta'$, nehme A4 eben ſo groß als den halben Umfang des erzeugenden Kreiſes, und theile A4 in eben ſo viel gleiche Theile A1; 1,2; 2,3; 3,4; ziehe nach C die Linien $1a'$, $2b'$, $3c'$, 4C, nehme $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, ſo ſind A, α', β', γ', δ' Punkte, welche in der Hypocykloide liegen.

§. 27.

Zuſatz. Der Halbmeſſer des Grundkreiſes ſei dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes gleich, alſo, Figur 8., $AC = 2 . AG$, ſo wird jede willkürlich gezogene Linie CM', welche den erzeugenden Kreis in M und den Grundkreis in M' ſchneidet, gleiche Bogen AM und AM' abſchneiden. Denn der Winkel ACM' iſt Mittelpunktswinkel für den Bogen AM', und Umfangswinkel für den Bogen AM, alſo hat der Bogen AM einen doppelt ſo großen Mittelpunktswinkel. Da ſich nun bei gleich großen Bogen die Mittelpunktswinkel umgekehrt wie ihre Halbmeſſer verhalten, ſo iſt $AM = AM'$. Taf. II. Fig. 8.

Nimmt man nun CM' als Durchmeſſer eines erzeugenden Kreiſes an, welcher AC in A' ſchneidet, ſo iſt auch der Bogen $M'A' = AM$, weil beide Bogen einerlei Umfangswinkel ACM' haben. Es iſt daher A' ein Punkt in der Hypocykloide, welcher zum Wälzungswinkel $M'GA' = \varphi$ gehört, und weil für jeden andern Wälzungswinkel der zugehörige Punkt A' ebenfalls in die Linie CA fällt, ſo iſt in dem Falle, wenn der Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes dem Halbmeſſer des Grundkreiſes gleich iſt, die Hypocykloide eine

grade Linie oder demjenigen Durchmeſſer des Grundkreiſes gleich, welcher durch den Anfangspunkt A geht.

§. 28.

Taf. II. Fig. 7. Aus irgend einem Punkte A′, Figur 7., der Hypocykloide ſei A′P ſowohl als G′Q auf AC, und A′R auf G′Q ſenkrecht gezogen, und man ſetze $CP = x$, $PA' = y$, $CA' = z$; $A'G'M' = \varphi$, $ACM' = \varphi'$, ſo iſt der Winkel

$CG'Q = 90° - \varphi'$ und $CG'A' = 180° - \varphi$, alſo iſt, weil

$RG'A' = CG'Q - CG'A' = \varphi - \varphi' - 90°$,

$\sin RG'A' = -\cos(\varphi - \varphi')$

$\cos RG'A' = \sin(\varphi - \varphi')$, daher

$A'R = A'G \sin RG'A' = -r\cos(\varphi - \varphi')$

$G'R = A'G' \cos RG'A = r\sin(\varphi - \varphi')$

$QG' = CG' \sin G'CQ = (a - r)\sin\varphi'$

$CQ = CG' \cos G'CQ = (a - r)\cos\varphi'$. Ferner iſt

$x = CP = CQ - A'R$ und

$y = PA' = QG' - G'R$, alſo

(I) $x = (a - r)\cos\varphi' + r\cos(\varphi - \varphi')$

(II) $y = (a - r)\sin\varphi' - r\sin(\varphi - \varphi')$.

Im Dreiecke $CG'A'$ iſt der Winkel $CG'A' = 180° - \varphi$, alſo $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, daher, weil $A'C = z$ iſt,

(III) $z^2 = (a - r)^2 + r^2 + 2r(a - r)\cos\varphi$.

Weil $\varphi' = \frac{r}{a}\varphi$ iſt (§. 25.), ſo folgt aus der Vergleichung vorſtehender drei Gleichungen mit den Ausdrücken für die Epicycloide §. 16., daß ſolche mit denſelben überein kommen, wenn der Halbmeſſer r negativ

genommen wird. Die Lage der Tangente und Normale wird daher auf eine ähnliche Art wie §. 17. gefunden. Iſt nemlich TM′ der Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes, welcher zum Punkte A′ der Hypocykloide gehört, ſo findet man die Tangente ST, welche zum Punkte A′ gehört, wenn durch A′ und den Endpunkt T des Durchmeſſers M′T die Linie TS gezogen wird. Die Normale iſt alsdann A′M′.

§. 29.

Zuſatz. Wird der Halbmeſſer des Grundkreiſes dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes gleich, ſo iſt $a = 2r$ und $\varphi = 2\varphi'$. Setzt man dieſe Werthe in die gefundenen Gleichungen, ſo iſt

$$x = 2r\cos\varphi'$$
$$y = r(\sin\varphi' - \sin\varphi') = 0$$
$$z^2 = 2r^2(1 + \cos 2\varphi') = 2r^2 . 2(\cos\varphi')^2,$$ alſo
$$z = 2r\cos\varphi'.$$

Dies giebt

$x = z$ und $y = 0$,

daher fällt die Hypocykloide in den Halbmeſſer CA, und wird eine grade Linie, wie ſolches ſchon aus §. 27. folgt.

§. 30.

Der Grundkreis AM′Z, Figur 9., einer Epicykloide AOZ, deren Anfangspunkt in A liegt, werde von dem Grundkreiſe A′M′Z′ einer Hypocykloide A′OZ′, deren Anfangspunkt in A′ liegt, dergeſtalt in M′ berührt, daß die Bogen AM′ und A′M′ einander gleich ſind; iſt nun der erzeugende Kreis M′OTN für beide Kurven gleich groß, und man nimmt auf demſelben den Bogen M′O = M′A = M′A′, ſo werden beide Kurven durch Taf. II. Fig. 9.

den Punkt O gehen, und ſich daſelbſt berühren. Daß beide Kurven durch O gehen, folgt aus §. 13. und 26. Da nun §. 15. und 28. OT die Tangente, und OM′ die Normale für beide Kurven iſt, ſo müſſen ſie ſich auch im Punkte O berühren.

Wird demnach der Grundkreis A′M′Z′ der Hypocykloide auf dem Grundkreiſe AM′Z der Epicykloide fortgewälzt, ſo bleiben beide Kurven für alle Lagen der Grundkreiſe mit einander in Berührung.

Iſt der Halbmeſſer des Grundkreiſes der Hypocykloide dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes gleich, ſo fällt die Hypocykloide in den Durchmeſſer des Grundkreiſes, welcher durch den Anfangspunkt A′ geht, und dieſer Durchmeſſer bleibt bei allen Lagen beider Grundkreiſe eine Tangente der Epicykloide.

§. 31.

Ueber die Eigenſchaften der ebenen Epicykloiden findet man in den Mémoires de l'acad. de Paris, Année 1706 (Amsterdam 1708) zwei Abhandlungen von *de la Hire*

Traité des Roulettes, où l'on demontre universellement de trouver leurs touchantes, leur points de recourbement et de rebroussement, leurs superficies et leurs longueurs. p. 438 — 488.

Méthode générale pour réduire toutes les lignes courbes à des Roulettes. p. 489 — 499.

Beide Abhandlungen zeichnen ſich zwar dadurch aus, daß in denſelben keine höhere Analyſis vorausgeſetzt wird, weshalb ſie ſelbſt von einem Anfänger leicht verſtanden werden könnten, aber der Vortrag iſt in einem hohen Grade un-

deutlich und nicht zureichend, wodurch wieder der angegebene Vorzug verloren geht. Sonſt kann man über ebene Epicykloiden nachleſen:

Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toutes ſortes de courbes ſur une autre courbe quelconque. Par M. *Nicole.* Mém. de l'acad. de Paris, Année 1707. (Amſtd. 1708) p. 103 — 126.

W. J. G. Karſten Anfangsgründe der mathematiſchen Analyſis und höhern Geometrie. Greifswalde 1786. S. 367 — 383.

G. S. Klügel mathematiſches Wörterbuch. 2. Theil. Leipzig 1805. S. 115 — 128.

V. Die ſphäriſche Epicykloide.

§. 32.

Bei den bisher unterſuchten Epicykloiden war vorausgeſetzt, daß ſich der Grundkreis mit dem erzeugenden Kreiſe in einerlei Ebene befand. Liegt hingegen der Grundkreis mit dem erzeugenden nicht in einerlei Ebene, und der Winkel, welchen der Durchmeſſer des Grundkreiſes mit dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes in jedem Berührungspunkte beider Kreiſe bildet, bleibt bei jeder Wälzung gleich groß, indem beide Ebenen, welche die Kreiſe bilden, gleiche Neigung behalten, ſo wird diejenige Linie, welche ein Punkt im erzeugenden Kreiſe beſchreibt, eine **ſphäriſche Epicykloide** (Epicycloïs sphaerica) genannt.

Um die ſtets gleiche Neigung des wälzenden Kreiſes gegen den Grundkreis zu erhalten, kann man ſich vorſtel-

Taf. II. Fig. 10. len, daß über dem Grundkreiſe AA'F, Figur 10., die Lage des erzeugenden Kreiſes AB gegeben ſei. Aus dem Mittelpunkt C des Grundkreiſes AF werde die ſenkrechte Linie CK errichtet, und der erzeugende Kreis AB als Grundfläche eines ſenkrechten Kegels AKB angenommen, deſſen Spitze in die ſenkrechte Linie CK fällt. Bleibt nun die Kegelſpitze unverändert in K, und man wälzt den Umfang ſeiner Grundfläche AB auf dem Grundkreiſe AA'F, ſo behält der erzeugende Kreis durchgängig gleiche Neigung gegen die Ebene des Grundkreiſes, weshalb man ABK den wälzenden oder erzeugenden Kegel nennen kann. Fällt der Punkt K oberhalb des Mittelpunkts C, ſo kann man ſich einen zweiten unbeweglichen Kegel AKF vorſtellen, deſſen Grundfläche der Grundkreis AA'F, und deſſen Höhe die ſenkrechte Linie CK bildet. Auf dieſem Grundkegel AKF läßt ſich der erzeugende Kegel herumrollen, und die Berührung beider wird jedesmal in einer graden Linie geſchehen.

Die Neigung der Fläche des erzeugenden Kreiſes gegen die Fläche des Grundkreiſes oder der Winkel BAC
ω ſei durchgängig = ω, der Halbmeſſer CA des Grund-
a kreiſes = a, des erzeugenden Kreiſes = r, ſo wird in
r dem Falle, wenn die Höhe des Grundkegels CK = r iſt, der Winkel ω = 90 Grad, oder der erzeugende Kreis ſteht ſenkrecht auf dem Grundkreiſe. Wird CK
Fig. 11. größer als r, wie Figur 11., ſo iſt BAC = ω ein ſtumpfer Winkel, und wenn CK kleiner als r wird, oder
Fig. 12. wenn K noch unterhalb C fällt, wie Figur 12., ſo iſt BAC = ω ein ſpitzer Winkel.

Fällt K in C, ſo verſchwindet der Grundkegel und der

erzeugende Kegel wälzt ſich auf der Ebene des Grundkreiſes. Fällt K unterhalb C, ſo wälzt ſich der erzeugende Kegel ABK, Figur 12., innerhalb einer koniſchen Aushöhlung AKF. Taf. II. Fig. 12.

Bei der Umwälzung des Kegels AKB, Figur 10., bleiben alle Punkte des erzeugenden Kreiſes AB gleich weit vom Punkte K entfernt, es müſſen daher auch alle Punkte der beſchriebenen Epicykloide gleich weit von K entfernt ſeyn oder in der Oberfläche einer Kugel liegen, deren Mittelpunkt K und deren Halbmeſſer die Seite KA des erzeugenden Kegels iſt. Die ſphäriſche Epicykloide liegt alſo durchgängig auf der Oberfläche einer Kugel, und iſt daher eine Linie von doppelter Krümmung. Hat der Erzeugungskreis bei ſeiner Umwälzung von A′ bis M die Epicykloide A′P beſchrieben, ſo kommt der beſchreibende Punkt A′ nach P, und PM iſt der abgewälzte Bogen des Erzeugungskreiſes, welcher dem Bogen A′M des Grundkreiſes gleich iſt. Fig. 10.

§. 33.

Aufgabe. Aus dem Halbmeſſer des Grundkreiſes, AC = a, Figur 12., und des erzeugenden Kreiſes AG = r, nebſt dem Winkel BAC = ω, den Halbmeſſer AK = k derjenigen Kugeloberfläche zu finden, auf welcher die zugehörige Epicykloide beſchrieben werden kann. Fig. 12.

Auflöſung. Aus dem Mittelpunkte G des erzeugenden Kreiſes ziehe man GL auf CE, und aus B die Linie BD auf CA ſenkrecht, ſo iſt AD = $2r\cos\omega$, und GL = AC — $\frac{1}{2}$AD = $a - r\cos\omega$.

Es iſt aber der Winkel $GKL = BAC = \omega$, daher

$$GK = GL \cdot \operatorname{cosec}\omega = (a - r\cos\omega)\operatorname{cosec}\omega$$
$$= a\operatorname{cosec}\omega - r\cot\omega.$$

und weil $KA^2 = AG^2 + GK^2$ iſt, ſo erhält man den geſuchten Halbmeſſer der Kugel

$$k = \sqrt{[r^2 + (a\operatorname{cosec}\omega - r\cot\omega)^2]}.$$

Taf. II. Fig. 11. Fällt der Mittelpunkt K über C, wie Figur 11., ſo muß man eben denſelben Werth für k erhalten. Es iſt zwar alsdann der Winkel $GKL = 180^\circ - BAC = 180^\circ - \omega$; aber weil $\operatorname{cosec}(180^\circ - \omega) = \operatorname{cosec}\omega$ und $\cot(180^\circ - \omega) = -\cot\omega$ iſt, ſo bleibt der Ausdruck für k wie oben.

Steht der erzeugende Kreis ſenkrecht auf dem Grundkreiſe, ſo iſt $\omega = 90$ Grad, $\operatorname{cosec}\omega = 1$ und $\cot\omega = 0$, daher

$$k = \sqrt{(r^2 + a^2)}.$$

Fällt der Mittelpunkt C des Grundkreiſes in den Mittelpunkt K der Kugeloberfläche, ſo iſt $k = a$ und $BAK = \omega$, man erhält daher im Dreiecke GAK

$$\cos\omega = \frac{AG}{AK} = \frac{r}{a}$$

in dieſem Falle rollt der erzeugende Kegel auf der Ebene des Grundkreiſes.

§. 34.

Im Vierecke AGKC, Figur 11., ſind bei G und C rechte Winkel, daher iſt

$CAG + CKG = 180^\circ$. Aber auch

$GKI + CKG = 180^\circ$, daher iſt der Winkel

$CAG = GKI$.

Die

Die rechtwinklichten Dreiecke AGo und CKo, Figur 12., ſind einander ähnlich, daher iſt auch der Winkel

CAG = GKI, wie Figur 11.

Hieraus folgt, daß der Winkel, unter welchem die Ebene des Erzeugungskreiſes gegen den Grundkreis geneigt iſt, dem Winkel gleich iſt, unter welchem die Axe des Erzeugungskegels die Axe des Grundkegels ſchneidet, oder es iſt CAG = ω = GKI.

§. 35.

Aufgabe. Eine ſphäriſche Epicykloide zu zeichnen.

Auflöſung. Aus dem gegebenen Halbmeſſer a des Grundkreiſes, dem Halbmeſſer r des erzeugenden Kreiſes, und dem Winkel ω, unter welchem beide Kreisflächen gegen einander geneigt ſind, läßt ſich (§. 33.) der Halbmeſſer k von der Kugeloberfläche finden, auf welcher die Epicykloide beſchrieben werden muß. Es ſei nun ABB″A″, Figur 13., eine Zone von dieſer Kugeloberfläche, welche von den Parallelkreiſen AA″, BB″ und den Bogen AB, A″B″ eingeſchloſſen iſt, ſo daß dieſe beide Bogen in den gemeinſchaftlichen Pol der Parallelkreiſe zuſammen laufen. Ferner ſei AA″ ein Theil des Grundkreiſes, und die grade Linie AB = 2r der Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes, deſſen Umfang AMB ganz in die Oberfläche der Kugel fällt (§. 32.). Nimmt man den beſchreibenden Punkt in A an, und läßt den Kreis AMB auf AA″ bis M′ wälzen, ſo muß, wenn AA′ die beſchriebene Epicykloide iſt, der abgewälzte Bogen M′A′ dem Bogen AM′ gleich ſeyn. Durch A′ ſei der Parallelkreis NN′ gelegt, welcher den zum Anfangspunkt der Epicykloide gehörigen erzeugenden Kreis in M ſchneidet, ſo iſt der Bogen AM = A′M′. Taf. II. Fig. 13.

alſo der Punkt A nach A′ und M nach M′ gekommen. Für jeden Punkt N im Bogen BNA, welcher durch den Anfangspunkt A der Epicykloide geht, findet man daher den zugehörigen Punkt A′ derſelben, wenn durch N der Parallelkreis NN′ gelegt, AM′ = AM genommen, und der Bogen M′N′ durch M′, und verlängert durch den Pol der Parallelkreiſe gelegt wird; alsdann erhält man den Abſtand NA′ = NN′ — NM.

So wie bei der ebenen Epicykloide dieſer Satz zur Beſtimmung eines jeden Punkts A′ derſelben angewandt worden iſt, um danach die ganze krumme Linie zu zeichnen, ſo kann dies auch bei der ſphäriſchen geſchehen. Es ſei daher A″βB″ der halbe Umfang des erzeugenden Kreiſes, und A″4 eben ſo groß; A″βB″ werde in eben ſo viel gleiche Theile A″α, αβ, βγ, γB″ getheilt wie A 4, und durch α, β, γ die Parallelkreiſe aa′, bb′, cc′, durch 1, 2, 3 aber ſolche Kreisbogen gelegt, welche ſich im Pole der Parallelkreiſe ſchneiden. Man nehme a′α′ = aα, b′β′ = bβ, c′γ′ = cγ, ſo wird die ſphäriſche Epicykloide durch die Punkte A″α′β′γ′d′ gehen.

§. 36.

Wird der Halbmeſſer r des erzeugenden Bogens ſehr klein gegen den Halbmeſſer a des Grundkreiſes, ſo fällt
Taf. II. Fig. 13. der Bogen AB, Figur 13., mit dem Durchmeſſer AB des erzeugenden Kreiſes beinahe zuſammen, und man kann annehmen, daß die Epicykloide in einen Kegel falle, deſſen krumme Oberfläche durch AB geht. Bei dieſer Annahme wird die ſphäriſche Epicykloide eben ſo wie die ebene Epicykloide oder Hypocykloide gezeichnet. Denn man darf nur aus dem gegebenen Halbmeſſer des Grundkreiſes,

AC oder A′C′ = a, Figur 14., dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes AB oder A′B′ = 2r und dem Winkel BAC oder B′A′C′ = ω, zuerſt die Seite AQ oder A′Q′ des ſenkrechten Kegels ſuchen. Dieſe erhält man, weil C′A′Q′ = 180° — ω, alſo sec (180° — ω) = sec ω iſt, Taf. I. Fig. 14.

$$AQ \text{ oder } A'Q' = a \sec \omega.$$

Mit dieſer Länge beſchreibe man, Figur 15. und 16., die Bogen Aα oder A′α′, nehme den Bogen Aα oder A′α′ = 2aπ, und auf dem Halbmeſſer QA oder Q′A′, die Linie AB oder A′B′ = 2r, ſo ſind AαβB oder A′α′β′B′ ebene Flächen, welche um den Kegel gelegt den Mantel von demjenigen Theile der krummen Oberfläche deſſelben bilden, innerhalb welchem ſich die zu beſchreibende Epicykloide befindet. Man kann daher dieſe Linie auf dem Mantel in einer Ebene beſchreiben, und den Streifen alsdann um die zugehörige Zone des Kegels oder der Kugel legen, ſo erhält man die ſphäriſche Epicykloide deſto genauer, je kleiner r gegen a iſt. Fig. 15. 16.

Wenn ω ein ſpitzer Winkel iſt, ſo entſteht in der Ebene ABβα eine Hypocykloide, und wenn ω ſtumpf wird, eine Epicykloide. Für beide gelten die im Vorhergehenden erwieſenen Eigenſchaften.

Wäre endlich ω = 90 Grad, ſo daß der Durchmeſſer ab des erzeugenden Kreiſes auf der durch den Grundkreis gelegten Ebene ſenkrecht ſteht, ſo fällt unter der obigen Vorausſetzung die ſphäriſche Epicykloide in die Oberfläche eines Cylinders; der Mantel wird ein Rechteck, und die Kurve, welche auf der Ebene des Rechtecks beſchrieben werden muß, iſt eine Cykloide,

welche bei b a Figur 14. um die Kugel gelegt, die ſphäriſche Epicykloide bildet.

§. 37.

Aufgabe. Die Länge der ſphäriſchen Epicykloide zu finden.

Taf. II. Fig. 17. Auflöſung. Auf dem Grundkreiſe AM, Figur 17., werde der Erzeugungskreis MB von A bis M gewälzt, wodurch die Epicykloide AO beſchrieben, und der Bogen MO dem Bogen AM gleich iſt. Man ziehe ON auf

u den Durchmeſſer BM ſenkrecht, und ſetze MN = u. Ferner ſei C der Mittelpunkt des Grundkreiſes, und der unveränderliche Neigungswinkel BMC = ω, der Halbmeſſer des Grundkreiſes CM = a, des Erzeugungskreiſes BG = GM = r. Aus O werde auf die Ebene CAM des Grundkreiſes die Linie OQ ſenkrecht gezogen, und durch NOQ die Ebene NOQP gelegt, ſo iſt OQ = NP und NO = QP. In der Ebene CAM

Fig. 18. ſei AQ die Projection der Epicykloide AO, Figur 18. Wächſt nun AO um das Element Oo, AQ um Qq, und AM um Mm, ſo ziehe man den Halbmeſſer Cm, verlängere die auf CM ſenkrechte Linie QP bis R, und unbeſtimmt nach D. Aus q ſei qp auf Cm ſenkrecht gezogen und bis D verlängert, ſo ſind die Dreiecke CPR und DpR einander ähnlich. Mit Rückſicht auf Figur 17. und 18. iſt

$MP = u \cos \omega$, alſo $\partial(MP) = \partial u \cos \omega$

$OQ = NP = u \sin \omega$, alſo $\partial(OQ) = \partial u \sin \omega$

$NO = PQ = \sqrt{(2ru - u^2)}$, alſo $\partial(PQ) = \frac{(r-u)\,\partial u}{\sqrt{(2ru - u^2)}}$

und wegen der Eigenſchaft des Kreiſes, der Bogen

$MO = \int \frac{r\partial u}{\sqrt{(2ru - u^2)}}$. Aber Bogen MO = Bogen AM, daher $\partial(AM) = \frac{r\partial u}{\sqrt{(2ru - u^2)}} = Mm$.

Ferner iſt

$mp - MP = Rp = \partial(MP)$

$pq - PQ = \partial(PQ)$, oder wenn qs auf DP ſenkrecht gezogen wird, ſo iſt $pq = RP + Ps$ und $PQ = Ps + Qs$, alſo $\partial(PQ) = RP - Qs$ oder $Qs = PR - \partial(PQ)$.

Es verhält ſich aber

$CM : CP = Mm : PR$ alſo iſt $PR = \frac{CP.\partial(AM)}{CM}$ und

$Mm : CM = Rp : DR$ alſo iſt $DR = \frac{CM.\partial(MP)}{\partial(AM)}$, daher

$Qs = PR - \partial(PQ) = \frac{CP.\partial(AM)}{CM} - \partial(PQ)$ und

$DQ = DR - PQ - PR$, oder weil PR als unendlich klein gegen DR wegfällt

$DQ = DR - PQ = \frac{CM.\partial(MP)}{\partial(AM)} - PQ.$

Ferner verhält ſich

$DR : Rp = Ds : sq$, alſo $sq = \frac{(DQ + Qs)\partial(MP)}{DR}$

oder weil Qs gegen DQ ebenfalls unendlich klein iſt, ſo wird

$$sq = \frac{DQ.\partial(MP)}{DR} = \frac{CM.\partial(MP) - PQ.\partial(AM)}{CM}.$$

Hieraus findet man, weil

$$CP = CM - MP = a - u\cos\omega$$

wenn die gefundenen Werthe in die Gleichungen für die Elemente sq und Qs geſezt werden

$$sq = \frac{a\cos\omega - r}{a}\,\partial u$$

$$Qs = \frac{u(a - r\cos\omega)}{a\sqrt{(2ru - u^2)}}\,\partial u.$$

Nun iſt $Qq^2 = sq^2 + Qs^2$, daher findet man das Quadrat vom Elemente der Projection

$$Qq^2 = \partial u^2\left[\frac{a\cos\omega - r}{a}\right]^2 + \partial u^2\left[\frac{au - ru\cos\omega}{a\sqrt{(2ru - u^2)}}\right]^2, \text{ oder}$$

$$Qq^2 = \frac{2ra^2\cos\omega^2 - 4ar^2\cos\omega + 2r^3 + a^2u\sin\omega^2 - r^2u\sin\omega^2}{a^2(2r - u)}\,\partial u^2$$

Der Bogen AO von der Epicykloide ſei $= v$, ſo iſt das Element $Oo = \partial v$ eben ſo groß, als die Quadratwurzel aus der Summe vom Quadrate des Elements Qq der Projection und dem Quadrate des Differentials von OQ, oder

$\partial v = \sqrt{[\partial(OQ)^2 + Qq^2]}$, oder weil $\partial(OQ) = \partial u . \sin\omega$, ſo erhält man das Differential vom Bogen der ſphäriſchen Epicykloide

$$\partial v = \frac{\partial u}{a}\sqrt{\frac{2r(a^2 - 2ar\cos\omega + r^2) - r^2u\sin\omega^2}{2r - u}}.$$

Taf. II. Fig. 17. Setzt man, Figur 17., $CG = b$, ſo iſt

$b^2 = a^2 - 2ar\cos\omega + r^2$, daher

$$\partial v = \frac{\partial u}{a}\sqrt{\frac{2b^2r - r^2u\sin\omega^2}{2r - u}}.$$

Dieſen Ausdruck zu integriren, ſetze man

$r^2\sin\omega^2 = c^2$ und $\dfrac{2b^2r - c^2u}{2r - u} = \dfrac{1 + c^2z^2}{z^2}$, ſo iſt

$u = 2r + 2r(c^2 - b^2)z^2$, daher $\partial u = 4r(c^2 - b^2)z\partial z$, folglich

$\partial v = \frac{4r}{a}(c^2 - b^2)\partial z\sqrt{(1 + c^2z^2)}$. Nun iſt

P. A. S. 161. (VII)

$\int \partial z \,.\, \sqrt{(1+c^2z^2)}$

$= \frac{1}{2} z \sqrt{(1+c^2z^2)} + \frac{1}{2c} \operatorname{logn} [cz + \sqrt{(1+c^2z^2)}] + \text{Const.}$

daher erhält man, weil $z^2 = \frac{2r - u}{2r(b^2 - c^2)}$ iſt,

$$v = \frac{2r}{a}(c^2 - b^2)\left[\frac{\sqrt{(2b^2r - c^2u)}\sqrt{(2r-u)}}{2b^2r - 2c^2r} + \frac{1}{c}\operatorname{logn}\frac{c\sqrt{(2r-u)} + \sqrt{(2b^2r - c^2u)}}{\sqrt{(2b^2r - 2c^2r)}}\right] + \text{Const.}$$

Für $u = o$ wird $v = o$, alſo

$$\text{Const} = \frac{2r(b^2 - c^2)}{a}\left[\frac{2br}{2b^2r - 2c^2r} + \frac{1}{c}\operatorname{logn}\frac{(b+c)\sqrt{2r}}{\sqrt{(2b^2r - 2c^2r)}}\right]$$

und hieraus der Bogen

$$v = \frac{2r(b^2 - c^2)}{a}\left[\frac{2br - \sqrt{(2b^2r - c^2u)}\sqrt{(2r-u)}}{2b^2r - 2c^2r} + \frac{1}{c}\operatorname{logn}\frac{(b+c)\sqrt{2r}}{\sqrt{(2b^2r - c^2u)} + c\sqrt{(2r-u)}}\right]$$

wo $c = r \sin \omega$ iſt.

§. 38.

1. Zuſatz. Wird der Neigungswinkel $\omega = 180$ Grad angenommen, ſo fällt der Erzeugungskreis mit dem Grundkreiſe in einerlei Ebene, und v wird ein Bogen der gemeinen Epicykloide. Alsdann iſt

$\cos \omega = \cos 180^\circ = -1$ und $\sin \omega = o$, alſo weil $b^2 = a^2 + 2ar + r^2$, folglich $b = a + r$ iſt,

$\partial v = \frac{a+r}{a} \partial u \sqrt{\frac{2r}{2r - u}}$, daher

$$v = \frac{a+r}{a}\int \partial u \sqrt{\frac{2r}{2r-u}} = -\frac{2(a+r)}{a}\sqrt{(4r^2 - 2ru)} + \text{Const.}$$

Für $u = o$ wird $v = o$, alſo Const $= \frac{4r(a+r)}{a}$, folglich der Bogen

$$\text{(I)}\quad v = \frac{2(a+r)}{a}\,[2r - \sqrt{(4r^2 - 2ru)}].$$

Wird nun, Figur 17., der Wälzungswinkel $MGO = \varphi$ geſetzt, ſo iſt $OGN = 180^\circ - \varphi$, alſo $\cos OGN = -\cos \varphi$, daher

Taf. II. Fig. 17.

$GN = OG . \cos OGN = - r \cos \varphi$, alſo

$MN = MG + GN$, oder

$u = r - r \cos \varphi = r (1 - \cos \varphi) = 2 r . \sin \frac{1}{2} \varphi$.

Dieſen Werth ſtatt u in die obige Gleichung geſetzt, giebt den Bogen

$$(II)\ v = \frac{4r (a + r)}{a} (1 - \cos \tfrac{1}{2} \varphi)$$

wie §. 18. für die ebene Epicykloide.

§. 39.

2. Zuſatz. Steht der Erzeugungskreis ſenkrecht auf dem Grundkreiſe, ſo iſt der Neigungswinkel beider Kreisflächen oder $\omega = 90^\circ$, alſo $\sin \omega = 1$, daher §. 37. $c^2 = r^2$, folglich der Bogen

$$v = \frac{2(b^2 - r^2)}{a} \left[\frac{2br - \sqrt{(2b^2 r - r^2 u)} \sqrt{(2r - u)}}{2b^2 - 2r^2} + \operatorname{logn} \frac{(b + r) \sqrt{2}}{\sqrt{(2b^2 - ru)} + \sqrt{(2r^2 - ru)}} \right],$$

wo $b^2 = a^2 + r^2$ iſt.

Hieraus folgt, daß für den angegebenen Fall die ſphäriſche Epicykloide von der Cykloide verſchieden iſt (§. 18.), ob man gleich beide als wenig von einander verſchieden annehmen kann.

§. 40.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung und Taf. II. Fig. 19. mit Rückſicht auf Figur 17. und 18. ſei AQ, Figur 19., die Projection von der Epicykloide AO und OQ auf der Ebene des Grundkreiſes ſenkrecht. In dieſer Ebene und deren Erweiterung ziehe man zum Punkte Q die Tangente TU, welche den Halbmeſſer CM in U ſchneidet, ſo läßt ſich die Lage der Tangente für die Projection, durch den Abſtand MU finden.

Im Dreiecke PQU, Figur 18., verhält ſich $Qs : sq = QP : PU$, alſo iſt $PU = \frac{QP \cdot sq}{Qs}$.

Setzt man aus §. 37. die daſelbſt gefundenen Werthe in dieſen Ausdruck, ſo erhält man

$$PU = \frac{(2r - u)(a \cos \omega - r)}{a - r \cos \omega}.$$

Aber $MU = MP + PU$ und $MP = u \cos \omega$, daher erhält man den Abſtand der Tangente, oder

$$MU = \frac{r \cos \omega (2a - u \cos \omega) - r(2r - u)}{a - r \cos \omega}.$$

Steht der Erzeugungskreis ſenkrecht auf dem Grundkreiſe, ſo iſt $\omega = 90°$, alſo $\cos \omega = 0$, daher

$$MU = -\frac{r(2r - u)}{a}$$

und weil dieſer Ausdruck jederzeit negativ iſt, ſo kann in dieſem Falle die verlängerte Tangente der Projection, den Halbmeſſer CM des Grundkreiſes nicht innerhalb der Kugel ſchneiden. Der Punkt U fällt außerhalb CM.

Senkrecht auf die Ebene des Grundkreiſes ſei Ut gezogen, ſo iſt tU mit OQ parallel, und die zum Punkte O der Epicykloide AO gehörige Tangente muß in die Ebene TUt fallen. Dieſe zum Punkte O gehörige Tangente ſei Tt, und ſchneide die Linie Ut in t, ſo wird durch MU, Ut und den gegebenen Punkt O die Lage der Tangente Tt beſtimmt.

In der Ebene TUt ziehe man On mit QU parallel, ſo iſt $nU = OQ$ und $On = QU$. Im Dreiecke Ont verhält ſich On zu nt, wie das Differential der Projection (Qq) zum Differential von OQ, oder $Qq : \partial(OQ) = On : nt$, daher $nt = \frac{\partial(OQ) \cdot QU}{Qq}$.

Im Dreiecke PQU iſt bei P ein rechter Winkel (Figur 18.), daher $QU = \sqrt{(PQ^2 + PU^2)}$, und wenn man aus §. 37. die gefundenen Werthe in dieſe Ausdrücke ſetzt, ſo erhält man nach gehöriger Abkürzung

$$nt = \frac{a(2r - u)\sin\omega}{a - r\cos\omega}.$$

Aber $Ut = Un + nt$ und $Un = OQ = u\sin\omega$, daher findet man die Höhe

$$Ut = \frac{r\sin\omega\,(2a - u\cos\omega)}{a - r\cos\omega}.$$

Wäre der Erzeugungskreis ſenkrecht auf dem Grundkreiſe, alſo $\omega = 90$ Grad, ſo wird

$$Ut = 2r = MB$$

die Höhe Ut iſt daher dem Durchmeſſer des Erzeugungskreiſes gleich.

Das Quadrat der Sehne MO des Grundkreiſes iſt nach der Eigenſchaft des Kreiſes $= MB . MN$ oder

$$MO^2 = 2ru.$$

Wäre dieſe Sehne MO auf der Tangente Tt in O ſenkrecht, ſo müßte $Mt^2 - Ot^2 = MO^2 = 2ru$ ſeyn. Nun iſt $Mt^2 = MU^2 + Ut^2$ und $Ot^2 = nt^2 + QU^2$, alſo $Mt^2 - Ot^2 = MU^2 + Ut^2 - nt^2 - QU^2$, und wenn man für dieſe Ausdrücke die gefundenen Werthe ſetzt, und die Größen, welche ſich aufheben, wegläßt, ſo wird

$$Mt^2 - Ot^2 = 2ru, \text{ alſo auch } = MO^2.$$

Die Sehne MO ſteht daher auf der Tangente Tt ſenkrecht, und weil die Epicykloide AO ganz auf die Oberfläche einer Kugel fällt, deren Mittelpunkt K iſt, ſo muß Tt zugleich eine Tangente der Kugeloberfläche in O ſeyn, daher muß der Kugelhalbmeſſer KO auf Tt ſenk-

recht ſtehen, und wenn man durch die Punkte O, M, K eine Ebene OMK legt, ſo ſteht die Tangente Tt auf dieſer Ebene ſenkrecht.

Weil MO auf der Tangente Ot und auch auf der Sehne OB ſenkrecht ſteht, ſo darf man nur durch OB eine Ebene ſenkrecht auf OM legen, ſo muß in dieſer Ebene die Tangente Ot liegen.

§. 41.

Ueber ſphäriſche Epicykloiden findet man in den Mémoires de l'Acad. de Paris, Année 1732. (Amsterd. 1736.) vier Abhandlungen, allein man wird in denſelben vergeblich auch nur über die Lage der Tangente Auskunft ſuchen. Die Aufſätze ſind:

Problème sur les Epicycloïdes sphèriques. Par M. (Jean) *Bernoulli.* pag. 316 — 343.

Solution du même Problème et de quelques autres de cette espèce. Par M. de *Maupertuis.* p. 343 — 350.

Manière de déterminer la nature des Roulettes formées sur la superficie convexe d'une sphère. Par M. *Nicole.* p. 365 — 392.

Des Epicycloïdes sphèriques. Par M. *Clairant.* pag. 392 — 401.

Vollſtändigere Unterſuchungen ſind in den Act. acad. scient. imp. Petropolitanae pro Anno 1779. Pars I. p. 49 — 71. unter dem Titel:

De Epicycloidibus in superficia sphaerica descriptis Auct. *A. J. Lexell.*

enthalten.

Dritter Abſchnitt.

Von der Evolvente oder Abwickelungslinie des Kreiſes.

§. 42.

Taf. III. Fig. 20. Um den unbeweglichen Kreis AMM″, Figur 20., ſei ein vollkommen biegſamer unausdehnbarer Faden ohne Dicke gelegt, deſſen Ende in A falle. Indem der Faden bei A angeſpannt erhalten und in einer Ebene abgewickelt wird, welche in der Erweiterung der Kreisfläche liegt, beſchreibe das Ende A des Fadens eine Linie AN, welche man die durch Abwickelung, **Evolution**, entſtandene Linie, oder die **Evolvente** (*Développante*) (evolvirende, abwickelnde) nennt. Diejenige krumme Linie AM′M″, um welche der Faden gewunden war, heißt die **Evolute** (*Développée*) oder die abgewickelte Linie. Um deutſche Ausdrücke für dieſe beiden Linien zu erhalten, wodurch zugleich Verwechſelungen vermieden werden, könnte man die Linie, um welche der Faden gelegt iſt, die **Umwickelungslinie**, und diejenige, welche durch die Abwickelung des Fadens erzeugt wird, die **Abwickelungslinie** nennen.

Bei jeder Lage des abgewickelten Fadens iſt derſelbe eine Tangente der **Evolute**, und es muß jedesmal der Bogen AM der Evolute, vom Anfangspunkte A der Evolvente bis zum Berührungspunkte M, eben ſo groß

als die Tangente MN ſeyn, weil dieſe die Länge des abgewickelten Fadens iſt. Wenn man umgekehrt in der Evolvente einen willkürlichen Punkt N′ annimmt, und von demſelben nach der Evolute eine Tangente N′M′ zieht, ſo iſt dieſe Linie M′N′ dem Bogen AM′ der Evolute gleich. Man nennt die Linien MN, M′N′ Halbmeſſer der Evolvente für die Punkte N, N′. Sie ſind jedesmal der Länge des abgewickelten Fadens gleich, und zugleich Normalen der Abwickelungslinie.

§. 43.

Zuſatz. Die angeführte Eigenſchaft giebt ein leichtes Mittel an die Hand, die Evolvente ohne Beihülfe eines Fadens zu zeichnen, wenn die Evolute gegeben iſt. Iſt die Evolute wie hier ein Kreis, ſo ziehe man durch den Anfangspunkt A, Figur 21., der Evolvente den Halbmeſſer AB, und zu B die Tangente BD. Man mache BD dem halben Umfange des Kreiſes AB gleich, theile BD in mehrere gleiche Theile B 1; 1, 2; 2, 3; . . . und in eben ſo viel gleiche Theile Aa, ab, bc, . . . theile man den Halbkreis AbB. Ziehe nach den Theilungspunkten a, b, c, . . . die Halbmeſſer Ca, Cb, Cc, . . . und darauf ſenkrecht die Linien a1, b2, c3, ...; nehme a1 = B1; b2 = B2; c3 = B3; u. ſ. w.; ſo ſind 1, 2, 3, 4, 5, D die geſuchten Punkte der Evolvente, durch welche man die geſuchte Kurve ziehen kann. Taf. III. Fig. 21.

Auch läßt ſich leicht einſehn, daß die Evolvente bis ins Unendliche fortgeſetzt werden kann, und in immer mehr erweiterten Bogen wie eine Spirallinie um die Evolute herum geht.

§. 44.

Taf. III. Fig. 20. Jeder Halbmeſſer MN, Figur 20., der Evolvente AN iſt zugleich der Krümmungshalbmeſſer für den Punkt N, weil ſich beweiſen läßt, daß jeder durch N gehende Kreisbogen, deſſen Halbmeſſer mN kleiner als MN iſt, innerhalb der Evolvente, und jeder, deſſen Halbmeſſer m′N größer als MN iſt, außerhalb der Evolvente fallen muß.

Von dem willkürlich angenommenen Punkte M′ werde die Tangente M′N′ bis an die Evolvente in N′ gezogen, und aus M durch N der Kreisbogen NO beſchreiben, welcher die Linie M′N′ oder ihre Verlängerung in irgend einem Punkte O ſchneidet. Man ziehe MO, ſo iſt

MO = MN = Bogen MA und

M′N′ = Bog. M′M + Bog. MA = Bog. M′M + MO.

Aber

Bog. M′M + MO > M′O, daher auch

$$M'N' > M'O;$$

folglich fällt der aus M beſchriebene Kreisbogen NO innerhalb der Evolvente NM, und jeder durch N gehende Kreisbogen, deſſen Mittelpunkt zwiſchen M und N fällt, muß ebenfalls innerhalb NN′ liegen.

Nimmt man den Mittelpunkt des durch N gehenden Kreisbogens auf der Verlängerung von NM, etwa in m′ an, ſo iſt Mm′ + m′M′ > Bogen MM′, alſo auch NM + Mm′ + m′M′ > NM + Bogen MM′, oder

$$Nm' + m'M' > N'M', \text{ oder}$$

$$Nm' + m'M' > N'm' + m'M', \text{ daher}$$

$$Nm' > N'm'.$$

Es muß daher jeder durch N aus m′ gezogene Kreisbo-

gen außerhalb NN' fallen, weil $m'N'$ kleiner als der Halbmeſſer Nm' iſt.

Hieraus folgt, daß MN der Krümmungshalbmeſſer für den Punkt N iſt, weil für alle zwiſchen M und N gelegenen Mittelpunkte die Kreisbogen innerhalb, und für alle in der Verlängerung von NM gelegenen, die Kreisbogen außerhalb der Evolvente NN' fallen.

Hiemit vergleiche man §. 20., wo der Krümmungshalbmeſſer ϱ bei der Epicykloide der Sehne t gleich wird.

§. 45.

Zuſatz. Die Lage der Tangente für jeden gegebenen Punkt N, Figur 20., der Evolvente findet man daher, wenn zum Punkte N der Krümmungshalbmeſſer NM gezogen, und auf dieſen in N die ſenkrechte Linie NT gezogen wird, ſo muß dieſe die Evolvente im Punkte N berühren. Taf. III. Fig. 20.

Man ſetze den Krümmungshalbmeſſer $MN = \varrho$, den Halbmeſſer AC der Evolute $= a$, und den Abſtand des Punktes N vom Mittelpunkte C oder $CN = z$, ſo iſt im rechtwinklichten Dreiecke $z^2 = a^2 + \varrho^2$, oder der Abſtand

$$z = \sqrt{(a^2 + \varrho^2)}$$

und der Krümmungshalbmeſſer

$$\varrho = \sqrt{(z^2 - a^2)}.$$

Setzt man den Winkel $ACM = \varphi$, und bezeichnet zugleich φ denjenigen Bogen, welcher zum Winkel ACM für den Halbmeſſer $= 1$ gehört, ſo iſt der Bogen $AM = a\varphi$, alſo

$$\varrho = a\varphi$$

und daher

$$z = a\sqrt{(1+\varphi^2)} \text{ und } \varphi = \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{a^2}}.$$

Nach §. 20. erhält man für den Krümmungshalbmeſſer der Epicykloide, wenn $r = \infty$ wird, $\varrho = \sqrt{(z^2 - a^2)}$ wie oben. Man kann daher die Kreisevolvente als eine Epicykloide anſehen, bei welcher der erzeugende Kreis unendlich groß iſt.

§. 46.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der Kreisevolvente zu finden.

Taf. III. Fig. 22. Auflöſung. Durch den Anfangspunkt A, Figur 22., ſei die Linie CP und von irgend einem Punkte N der Evolvente die Linie NP auf CP ſenkrecht gezogen. Iſt nun MN der Krümmungshalbmeſſer für den Punkt N, und man ſetzt

$AC = a$, $CP = x$, $PN = y$, $CN = z$,
$MN = \text{Bogen } AM = \varrho$, den Winkel $ACM = \varphi$, und den Bogen $AN = v$;

ferner MQ auf CP und NL auf MQ ſenkrecht gezogen, ſo iſt der Winkel $NMQ = \varphi$, alſo

$NL = \varrho \sin\varphi$ und $ML = \varrho\cos\varphi$, und
$CQ = a\cos\varphi$ und $MQ = a\sin\varphi$.

Aber $\varrho = a\varphi$ (§. 45.), daher erhält man, weil

$CP = x = NL + CQ$ und
$PN = y = MQ - ML$ iſt,

$$x = a(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)$$
$$y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Hieraus findet man ferner wenn differenziirt wird

$\partial x = a\varphi\partial\varphi\cos\varphi$ und $\partial y = a\varphi\partial\varphi\sin\varphi$, alſo

$\partial v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = a^2\varphi^2\partial\varphi^2(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) = a^2\varphi^2\partial\varphi^2$,

oder

oder $\partial v = a\varphi\partial\varphi$,

und wenn integrirt wird, ſo findet man den Bogen der Evolvente AN, oder

$$(\mathrm{I})\ v = \tfrac{1}{2}a\varphi^2$$

wo keine Conſtante hinzu kommt, weil φ mit v zugleich verſchwindet.

Noch erhält man nach §. 45. für den Bogen der Evolvente folgende Ausdrücke

$$(\mathrm{II})\ v = \frac{\varrho^2}{2a} = \frac{z^2 - a^2}{2a}.$$

Der Krümmungshalbmeſſer ϱ iſt daher die mittlere Proportionale zwiſchen dem zugehörigen Bogen der Evolvente und dem Durchmeſſer der Evolute.

§. 47.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ANCA, Figur 22., zu finden. Taf. III. Fig. 22.

Auflöſung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ſetze man die Fläche ANC = F. Wächſt nun v um Nn = ∂v, und z um on = ∂z, ſo iſt im rechtwinklichten Dreieck onN die Seite
No = $\sqrt{(\partial v^2 - \partial z^2)}$. Aber §. 46. II.
$\partial v^2 = \frac{z^2\partial z^2}{a^2}$, daher No = $\frac{\partial z}{a}\sqrt{(z^2 - a^2)}$, und weil ∂F = Fläche NCn = $\frac{1}{2}z$. No = $\frac{z\partial z}{2a}\sqrt{(z^2 - a^2)}$ iſt, ſo erhält man durch die Integration den Inhalt der Fläche ANCA, oder

$$F = \frac{\sqrt{(z^2 - a^2)^3}}{6a} = \frac{\varrho^3}{6a} = \tfrac{1}{6}a^2\varphi^3\ (\text{§. }45.)$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $z = a$ die Fläche F verſchwindet.

Vierter Abſchnitt.

Von der logarithmiſchen Linie.

§. 48.

Diejenige krumme Linie, deren Ordinaten eine geometriſche Reihe bilden, wenn die zugehörigen Abſciſſen eine arithmetiſche Reihe geben, heißt eine logarithmiſche Linie (Curva logarithmica s. logistica). Nimmt
Taf. III. man auf der Axe AP, Figur 23., die Theile AB, BC,
Fig. 23. CD, ... gleich groß an, ſo ſtehen die Abſciſſen AB, AC, AD, ... in einer arithmetiſchen Reihe. Bilden alsdann die zugehörigen Ordinaten Aa, Bb, Cc, ... eine geometriſche Reihe, ſo klein oder groß man auch AB annehmen mag, ſo iſt MN eine logarithmiſche Linie.

Für den Anfangspunkt A ſetze man die zugehörige Ordinate $Aa = a$; ferner $AB = b$ und $Bb = c$. Da nun die Ordinaten Aa, Bb, ... Glieder einer geometriſchen Reihe ſind, ſo verhält ſich

$$Aa : Bb = Bb : Cc \text{ oder } a : c = c : Cc$$

daher iſt $Cc = \frac{c^2}{a}$.

Ferner $Bb : Cc = Cc : Dd$ oder $c : \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{a} : Dd$,

daher iſt $Dd = \frac{c^3}{a^2}$.

Eben ſo $Ee = \frac{c^4}{a^3}$ u. ſ. w.

Daher gehören zu den

Abſciſſen $0;\ b;\ 2b;\ 3b;\ \ldots\ nb$

die Ordinaten $a;\ c;\ \frac{c^2}{a};\ \frac{c^3}{a^2};\ \ldots\ \frac{c^n}{a^{n-1}}$.

Man ſetze $AP = x = nb$ und $PM = y$, ſo iſt $y = \frac{c^n}{a^{n-1}}$

oder $y = \frac{ac^n}{a^n} = a\left(\frac{c}{a}\right)^n$. Aber $n = \frac{x}{b}$, daher findet man die Ordinate PM, oder

$$\text{(I)}\quad y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$$

oder auch

$$\left(\frac{y}{a}\right)^b = \left(\frac{c}{a}\right)^x.$$

Nimmt man hievon die Logarithmen, ſo iſt für jedes logarithmiſche Syſtem

$$\text{(II)}\quad b \log \frac{y}{a} = x \log \frac{c}{a}$$

wodurch man ſowohl als durch (I) die allgemeine Gleichung für die logarithmiſche Linie erhält.

Dieſe Gleichungen erhalten eine einfachere Geſtalt, wenn man die Ordinate Aa, welche dem Anfangspunkte der Abſciſſen entſpricht, $= 1$ ſetzt. Alsdann wird $a = 1$, daher

$$\text{(III)}\quad y^b = c^x \text{ und}$$

$$\text{(IV)}\quad b \log y = x \log c.$$

Es verhält ſich alsdann $b : x = \log c : \log y$, oder die Abſciſſen verhalten ſich wie die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten.

Setzt man die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $2,7182818 \ldots = e$, ſo iſt $\operatorname{logn} e = 1$. Wird

nun in (I) und (II) $\frac{c}{a} = e$ geſetzt, ſo erhält man

$$(V)\quad y = ae^{\frac{x}{b}}$$

$$(VI)\quad x = b \operatorname{logn} \frac{y}{a}$$

und für $a = 1$ wird

$$(VII)\quad y = e^{\frac{x}{b}} \text{ und}$$

$$(VIII)\quad x = b \operatorname{logn} y.$$

Für $a = b = 1$ wird $x = \operatorname{logn} y$; in dieſem Falle ſind daher die Abſciſſen Logarithmen von den zugehörigen Ordinaten. Auch iſt alsdann $c = e$.

§. 49.

Aus der allgemeinen Gleichung $y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$ erhält man ſowohl für poſitive als negative Werthe von x allemal poſitive Werthe für y, daher liegt die Kurve nur auf einer Seite der Axe AP. Mit x wächſt y ohne Ende fort, und wenn x negativ wird, ſo können die Werthe für y ohne Ende vermindert werden, je größer x nach der Seite AP′ genommen wird, daher iſt die Axe AP eine Aſymptote der logarithmiſchen Linie.

§. 50.

Aufgabe. Eine logarithmiſche Linie zu zeichnen.

Taf. III. Fig. 24. Auflöſung. Es ſei PP′, Figur 24., die Abſciſſenaxe, auf welcher entweder zwei nahe neben einander liegende Ordinaten AA′ und BB′ gegeben oder willkürlich angenommen ſind. Man nehme die Weite AB, trage ſolche aus B nach C, aus C nach D u. ſ. w., und ziehe durch die Punkte C, D, ... auf PP′ ſenkrechte Linien CC′, DD′, ... von unbeſtimmter Länge. Durch B

und A' ziehe man die Linie $B'A'a$ bis an die Axe PP', trage aus a nach b, aus b nach c, u. ſ. w. die Weite AB; ziehe durch bB' eine Linie, bis ſolche CC' in C' ſchneidet; durch CC' eine Linie, bis ſolche DD' in D' ſchneidet u ſ. w., ſo liegen die Punkte A', B', C', D', ... in einer logarithmiſchen Linie.

Beweis. Die Dreiecke aAA', aBB' und bBB', bCC' ſind ſich ähnlich, daher verhält ſich

$$AA' : aA = BB' : aB$$
$$bB : BB' = bC : CC'.$$

Der Zeichnung gemäß iſt aber

$bB = aA$ und $bC = aB$, daher verhält ſich auch

$AA' : BB' = BB' : CC'$,

oder BB' iſt die mittlere Porportionale zwiſchen AA' und CC'. Eben ſo läßt ſich beweiſen, daß CC' die mittlere Proportionale zwiſchen BB' und DD' iſt, u. ſ. w., daher bilden die Ordinaten AA', BB', CC', ... eine geometriſche Reihe, wenn die zugehörigen Abſciſſen eine arithmetiſche bilden, folglich liegen die Punkte A', B', C', D', ... in einer logarithmiſchen Linie.

§. 51.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für jeden Punkt der logarithmiſchen Linie zu finden.

Auflöſung. Die zum Punkte M, Figur 23., gehörige Tangente ſei MT, und der Winkel, welchen ſie mit der Ordinate MP bildet, oder $PMT = \varphi$, ſo iſt nach bekannten Lehren $\operatorname{tgt} \varphi = \frac{\partial x}{\partial y}$. Taf. III. Fig. 23.

Nun iſt $\partial A^x = A^x \partial x \operatorname{logn} A$, daher erhält man aus der Gleichung $y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$, wenn differenziirt wird,

$\partial y = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}} \partial x \operatorname{logn}\frac{c}{a} = \frac{y\,\partial x}{b} \operatorname{logn}\frac{c}{a}$, alſo

$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b}{y \operatorname{logn}\frac{c}{a}}$, und hieraus

$$\text{(I)}\quad \operatorname{tgt}\varphi = \frac{b}{y \operatorname{logn}\frac{c}{a}}.$$

Für $\frac{c}{a} = e$ wird $\operatorname{logn}\frac{c}{a} = 1$, daher in dieſem Falle

$$\text{(II)}\quad \operatorname{tgt}\varphi = \frac{b}{y}.$$

Weil im Dreiecke PMT die Linie $PT = y \operatorname{tgt}\varphi$ iſt, ſo erhält man die Subtangente

$$\text{(III)}\quad PT = \frac{b}{\operatorname{logn}\frac{c}{a}},$$

und, für $\frac{c}{a} = e$, wird $PT = b$.

Bei der logarithmiſchen Linie iſt daher die Subtangente eine unveränderliche Größe.

§. 52.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer für jeden Punkt der logarithmiſchen Linie zu finden.

Auflöſung. Den Coordinaten x, y entſpreche der Krümmungshalbmeſſer r und der Bogen v, ſo iſt

$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$.

Nach §. 51. iſt aber $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b}{y \operatorname{logn}\frac{c}{a}}$, oder, wenn

man logn $\frac{c}{a} = \alpha$ ſetzt, $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b}{\alpha y}$, daher erhält man

$$\partial v = \frac{\partial y \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}{\alpha y}.$$

Weil $\partial y = \frac{\alpha y \partial x}{b}$, ſo erhält man, wenn ∂x conſtant geſetzt wird

$$\partial^2 y = \frac{\alpha \partial y \partial x}{b} = \frac{\alpha \partial y}{b} \cdot \frac{b \partial y}{\alpha y} = \frac{\partial y^2}{y}$$, alſo

$$\partial x \partial^2 y = \frac{b \partial y^3}{\alpha y^2}.$$

Nun iſt, wenn ∂x conſtant angenommen wird, $r = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y}$, daher findet man den Krümmungshalbmeſſer

$$r = \frac{-\sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)^3}}{\alpha^2 b y}.$$

§. 53.

Aufgabe. Die Länge des Bogens einer logarithmiſchen Linie zu finden.

Auflöſung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. erhält man

$$\partial v = \frac{\partial y \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}{\alpha y}$$, daher (P. A. S. 156. III.)

$$v = \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)} - b \,\text{logn}\, \frac{b + \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}{y} + \text{Const.}$$

Für $y = a$ wird $v = 0$, alſo

$$\text{Const.} = -\sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)} + b \,\text{logn}\, \frac{b + \sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)}}{a},$$

daher findet man die Länge des Bogens, oder

$$v = \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)} - \sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)} + b \,\text{logn}\, \frac{by + y\sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)}}{ab + a\sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}$$

wo $\alpha = \text{logn}\, \frac{c}{a}$ iſt.

§. 54.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche AaMP, Figur
Taf. III. 23., zu finden.

Fig. 23. Auflöſung. Der Inhalt dieſer Fläche ſei $= F$, ſo iſt mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung

$\partial F = y \partial x$. Aber $\partial x = \frac{b \partial y}{\alpha y}$, daher

$\partial F = \frac{b}{\alpha} \partial y$, folglich $F = \frac{b}{\alpha} y + \text{Const.}$

Für $y = a$ wird $F = 0$, alſo $\text{Const.} = -\frac{ab}{\alpha}$, daher $F = \frac{by}{\alpha} - \frac{ab}{\alpha}$, oder man findet, weil $\alpha = \text{logn} \frac{c}{a}$, die Fläche

$$F = \frac{b(y - a)}{\text{logn}\, c - \text{logn}\, a}.$$

Fünfter Abſchnitt.

Von den Spirallinien.

§. 55.

Fig. 25. Die Linie CB, Figur 25., ſei die Axe irgend einer ge-
gebenen krummen oder einer graden Linie QQ′, deren Na-
tur und Lage durch eine Gleichung zwiſchen den rechtwink-
z lichten Koordinaten $CP = z$ und $PQ = u$ beſtimmt
u iſt. Für zwei bekannte Koordinaten ſei $CB = a$ und
a b $BB' = b$, ſo läßt ſich mit Hülfe der gegebenen krummen
Linie QQ′ eine zweite krumme Linie NN′ durch folgendes
Verfahren finden. Aus dem Punkte C als Mittelpunkt
beſchreibe man mit dem Halbmeſſer $CA = 1$ den Kreis

AMM′A, deſſen Umfang alsdann $= 2\pi$ iſt; auch werde jeder Bogen dieſes Kreiſes, von der Axe CB ab, aus A nach M gemeſſen. Nun kann ein jeder Kreisbogen, wie AM $= \psi$, ſo angeſehen werden, als wenn er mit irgend einer Ordinate PQ $=$ u der gegebenen krummen Linie zuſammen gehört, indem man den Bogen ψ durch folgende Proportion beſtimmt:

$$b : u = 2\pi : \psi.$$ Es iſt daher

$$\text{Bogen } \psi = \frac{2\pi u}{b}.$$

Durch den Endpunkt M des Bogens ψ ziehe man den Halbmeſſer CM, trage die Abſciſſe CP $=$ z aus C nach N, ſo erhält man dadurch einen Punkt N in der krummen Linie NN′, deſſen Abſtand vom Mittelpunkte C $=$ CN $=$ z iſt. Auf eine ähnliche Art laſſen ſich mehrere Punkte wie N finden, durch welche man die krumme Linie NN′ beſchreiben kann, welche man eine Spirallinie nennt.

Die gegebene Linie QQ′, welche jede beliebige Lage erhalten kann, und zur Beſchreibung der Spirallinie NN′ erfordert wird, heißt die **erzeugende Linie** (Generatrix. *Génératrice*); der Mittelpunkt C der **Pol** der Spirallinie; der Kreis AMM′A $= 2\pi$ der **Grundkreis** oder die Baſis, deren Anfangspunkt A iſt; die Linie CC′ die Axe der Spirallinie; der Winkel ACM für den Bogen ψ, der **Polarwinkel** des Punkts N und CN der **Polarabſtand** (Radius vector) dieſes Punkts.

So verſchieden als die Erzeugungslinie QQ′ ſeyn kann, ſo verſchieden muß auch die Geſtalt der Spirallinie NN′ ausfallen. Iſt daher QQ′ eine grade Linie, eine

Parabel, eine Hyperbel u. ſ. w., ſo heißt die Spirallinie eine lineare, paraboliſche, hyperboliſche u. ſ. w. Jede dieſer Spirallinien kann aber nach den verſchiedenen Lagen, welche die Erzeugungslinie erhält, verſchieden ſeyn.

Weil der Bogen $\psi = \frac{2\pi u}{b}$ nach Verſchiedenheit der Werthe u jede Größe erhalten, und den Umfang des Grundkreiſes (2π) vielmal übertreffen kann, ſo folgt hieraus, daß ſich die Spirallinie eben ſo oft um ihren Pol C windet. Erhält u einen negativen Werth, oder fällt PQ oberhalb der Linie CB, ſo wird auch der Bogen ψ negativ, und man muß die Länge dieſes Bogens von A nach M', alſo in entgegengeſetzter Richtung abmeſſen. Die Gleichung $\psi = \frac{2\pi u}{b}$ bleibt aber unverändert, weil ψ mit u zugleich negativ wird. Uebrigens iſt es willkürlich, wo man zur Beſtimmung des Maaßes für den Bogen ψ den Anfangspunkt A in der Linie CB annimmt, wenn man nur die Vorausſetzung beibehält, daß für den Grundkreis der Halbmeſſer CA = 1 iſt.

Jeder Bogen, welcher von der Axe CC' anfängt und um den Pol herum geht, bis er wieder dieſe Axe ſchneidet, heißt eine *Windung* der Spirallinie. Der Abſtand zweier auf einander folgenden Windungen wird hier immer auf derjenigen Linie gemeſſen werden, welche verlängert durch den Pol geht.

I. Von der linearen oder archimediſchen Spirallinie.

§. 56.

Die grade Linie KK', Figur 26. und 27., als Erzeugungslinie einer Spirale, deren Pol in C liegt, durchſchneide die Axe CC' in A, ſo wird ihre Lage gegen die Axe auf folgende Art beſtimmt, wenn für irgend eine beſtändige Linie $BB' = b$, die Weite $CB = a$, und für den Durchſchnittspunkt A die Weite $CA = c$ bekannt iſt; für irgend einen Werth $PQ = u$ beſtimme man den zugehörigen Bogen $AM = \psi$ durch die Proportion $b : u = 2\pi : \psi$, oder indem man $\psi = \frac{2\pi u}{b}$ nimmt, ſo erhält man den Punkt M, alſo auch die Linie CM, und auf derſelben den Punkt N, wenn $CN = CP = z$ genommen wird. Fällt $P'Q'$ oberhalb CC', ſo iſt u alſo auch ψ negativ, daher muß der Bogen ψ von A nach M' getragen werden. Auf dieſe Art laſſen ſich für jeden Werth von u die zugehörigen Punkte N in der Spirallinie finden; auch wird es hienach leicht ſeyn, eine allgemeine Gleichung für die linearen Spirallinien anzugeben. Denn es verhält ſich Figur 26. Taf. III. Fig. 26. 27. b a c

$$BB' : AB = PQ : AP \text{ oder}$$
$$BB' : BC - AC = PQ : CP - CA \text{ daher}$$
$$b : a - c = u : z - c$$

und dieſelbe Proportion gilt auch für Figur 27.

Eben ſo verhält ſich Figur 26.

$$BB' : AB = P'Q' : AP' \text{ oder}$$
$$BB' : BC - AC = P'Q' : AC - CP' \text{ daher}$$

$$b : a - c = -u : c - z \text{ oder}$$
$$b : a - c = u : z - c.$$

Auf gleiche Art erhält man Figur 27.

$$b : c - a = u : c - z \text{ oder}$$
$$b : c - a = -u : z - c;$$

alſo für dieſe beiden Fälle

$$b : a - c = u : z - c.$$

Es iſt daher ganz allgemein

$$u = \frac{b(z - c)}{a - c}.$$

Weil aber $u = \frac{b\psi}{2\pi}$,

ſo erhält man hieraus, wenn z entwickelt wird, eine allgemeine Gleichung für die linearen Spirallinien

$$(1)\ z = c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi}.$$

Für $\psi = o$ wird $z = c$, welches ſehr wohl zu merken iſt, damit die Werthe von ψ richtig beurtheilt werden können, und damit man denjenigen Punkt in der Spirallinie ſogleich angeben kann, für welchen $\psi = o$ iſt.

Weil der Bogen ψ jeden poſitiven oder negativen Werth erhalten und bis ins unendliche wachſen kann, ſo wird die lineare Spirale in unzählig vielen Windungen um ihren Pol herumgeführt werden können.

Auch folgt hieraus, daß wenn die Polarwinkel ψ um gleich viel wachſen, ſo müſſen auch die Polarabſtände z um gleich viel zu nehmen.

Taf. III. Fig. 26. 27. 28. Für $c = o$ fällt, Figur 26. und 27., A in C, (Figur 28.), und die allgemeine Gleichung verwandelt ſich in die gewöhnliche Gleichung für die archimediſche Spirallinie

$$(II)\ z = \frac{a\psi}{2\pi}.$$

Alsdann verhalten ſich die Polarwinkel wie die zugehörigen Polarabſtände der Spirallinie.

§. 57.

Wächſt der Bogen AM = ψ, Figur 26., um 2π, ſo bleibt die Lage des Halbmeſſers CM, in welchen die Polarabſtände fallen, ungeändert. Daſſelbe gilt, wenn ψ um 2π abnimmt. Es müſſen daher alle Polarabſtände für die Winkel Taf. III. Fig. 26.

$$\psi;\ \psi \pm 2\pi;\ \psi \pm 4\pi;\ \psi \pm 6\pi \text{ u. ſ. w.}$$

in einerlei Halbmeſſer CM fallen.

Iſt daher irgend ein Polarabſtand

$$z = c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi},$$

ſo ſind für denſelben Halbmeſſer des Grundkreiſes die nächſten Polarabſtände

$$z' = c + (a - c)\frac{\psi \pm 2\pi}{2\pi} = c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi} \pm (a - c)$$

alſo der Unterſchied

$$z - z' = \mp (a - c).$$

Es ſind daher ſämmtliche Abſtände von zwei auf einander folgenden Windungen der Spirallinie einander gleich, vorausgeſetzt, daß dieſe Abſtände auf den Halbmeſſern des Grundkreiſes oder deren Verlängerung gemeſſen werden.

In der allgemeinen Gleichung für die Spirallinie wird $z = 0$, wenn $c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi} = 0$, oder wenn

$$\psi = \frac{-2\pi c}{a - c}$$

wird; alsdann fällt die Spirale in den Mittelpunkt C. Bei

der gewöhnlichen Spirale, wo $c = 0$ iſt, wird $z = 0$ für $\psi = 0$.

Weil der Bogen ψ auch für negative Werthe bis ins Unendliche wachſen kann, ſo laſſen ſich für z eben ſo wohl poſitive als negative Werthe angeben. Hier iſt der Kürze wegen nur von poſitiven Werthen für z die Rede, da überdies für die negativen Werthe von z eben dieſelbe Spirallinie, aber in einer entgegengeſetzten Lage, erhalten wird. Durch Zeichnung wird dieſe entgegengeſetzte Spirallinie erhalten, wenn man die Erzeugungslinie K′K nach K″ verlängert, und danach die zugehörige Kurve aufträgt.

§. 58.

Taf. III. Fig. 29. Um jeden Kreis ABDE, Figur 29., läßt ſich leicht eine Spirallinie AHKMF beſchreiben, wenn der Abſtand AF zweier Windungen der Spirale für einerlei Halbmeſſer CF gegeben iſt. Denn nach §. 56. müſſen die Polarabſtände um gleich viel zunehmen, wenn die Polarwinkel gleich viel wachſen; wenn man daher die hinlänglich verlängerten ſenkrechten Durchmeſſer AD und BE zieht, und den Bogen AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile AI, III, IIB und $AG = \frac{1}{4}AF$ in eben ſo viel gleiche Theile A, 1; 1, 2; 2, G eintheilt, die Linien CI, CII und die Bogen 1P, 2Q, GH zieht, bis ſich ſolche in den Punkten P, Q, H ſchneiden, ſo kann durch die Punkte APQH die erſte Viertelwindung der Spirale gezogen werden. Je kleiner die Theile AI, III .... ſind, deſto genauer läßt ſich die geſuchte Kurve zeichnen.

Bei dem übrigen Theile der Spirale wird auf eine ähnliche Art verfahren, wie ſolches leicht aus der Figur erſehen werden kann.

§. 59.

Aufgabe. Die Eigenſchaften der Tangente an irgend einem Punkte der archimediſchen Spirallinie zu beſtimmen.

Auflöſung. Für den Bogen des Grundkreiſes AM $= \psi$, Figur 26., ſei N der zugehörige Punkt der Spirale. Wächſt nun die Spirallinie AN um das Element Nn, ſo wächſt AM $= \psi$ um Mm $= \partial\psi$. Man ziehe No ſenkrecht auf Cn, ſo iſt on $= \partial z$, und es verhält ſich Taf. III. Fig. 26.

$$CM : Mm = CN : No \text{ oder}$$

$$1 : \partial\psi = z : No \text{ alſo iſt } No = z\partial\psi.$$

Nun fällt die zum Punkte N gehörige Tangente NT mit dem Elemente Nn zuſammen, und wenn man die Subtangente CT, wie erfordert wird, ſenkrecht auf CN zieht, ſo iſt $\triangle noN \backsim NCT$, alſo verhält ſich

$$no : No = NC : CT \text{ oder}$$

$$\partial z : z\partial\psi = z : CT, \text{ daher iſt } CT = z^2 \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Aus der allgemeinen Gleichung $z = c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi}$ erhält man $\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{2\pi}{a - c}$, daher iſt die Subtangente

$$\text{(I) } CT = \frac{2\pi z^2}{a - c}.$$

Mit dem Halbmeſſer CN $= z$ beſchreibe man den Bogen NP, ſo iſt derſelbe $= z\psi$, oder man erhält, weil $\psi = \frac{2\pi(z - c)}{a - c}$ iſt,

Bogen NP $= z\psi = \frac{2\pi z(z-c)}{a-c} = \frac{2\pi z^2}{a-c} - \frac{2\pi cz}{a-c}$

daher $\frac{2\pi z^2}{a-c} =$ Bogen NP $+ \frac{2\pi cz}{a-c}$. Es iſt daher auch die Subtangente

$$CT = \text{Bogen } NP + \frac{2\pi cz}{a-c}.$$

Für $a = 0$ wird

$$CT = \text{Bogen } NP - 2\pi z$$

und für $c = 0$ iſt

$$CT = \text{Bogen } NP.$$

Man ſetze den Winkel $CNT = \omega$, ſo iſt $\text{tgt } \omega = \frac{CT}{CN}$, oder

$$\text{(II) } \text{tgt } \omega = \frac{2\pi z}{a-c} = \frac{2\pi c}{a-c} + \psi.$$

Für $z = 0$ wird

$$\text{tgt } \omega = 0,$$

alſo fällt die Tangente, welche die Spirallinie im Pole C berührt, in den Halbmeſſer AC.

Für $z = a - c$ iſt

$$\text{tgt } \omega = 2\pi = 6,283185 = \text{tgt } 80^\circ\, 57'\, 25''$$

und für $z = 2(a-c)$ wird

$$\text{tgt } \omega = 4\pi = 12,566370 = \text{tgt } 85^\circ\, 27'\, 0''\, 3'''.$$

§. 60.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der archimediſchen Spirallinie zu finden.

Auflöſung. Damit die Länge dieſes Bogens vom Pole ab beſtimmt werde, und derſelbe mit $\psi = 0$ zugleich verſchwinde, ſo muß zur Beſtimmung der Polarabſtände die Gleichung §. 56. II. $z = \frac{a\psi}{2\pi}$ angenommen werden, wo ψ mit z zugleich $= 0$ wird. Es ſei daher,

Figur

Figur 28., der Bogen $CN = v$, deſſen zugehöriger Bogen am Grundkreiſe $= \psi$ iſt, ſo erhält man für $Nn = \partial v$, $on = \partial z$ und $No = z\partial\psi$, alſo Taf. III. Fig. 28.

$Nn = \sqrt{(on^2 + No^2)}$ oder $\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + z^2 \partial\psi^2)}$.

Es iſt aber $\partial z = \frac{a\partial\psi}{2\pi}$, alſo $\partial\psi^2 = \frac{4\pi^2 \partial z^2}{a^2}$, daher $\partial v = \partial z \sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2 z^2}{a^2}\right)} = \frac{\partial z}{a} \sqrt{(a^2 + 4\pi^2 z^2)}$, folglich (P. A. S. 161. VII)

$$v = \frac{1}{a} \int \partial z \sqrt{(a^2 + 4\pi^2 z^2)} = \frac{zw}{2a} + \frac{a}{4\pi} \operatorname{logn}(2\pi z + w) + \text{Const}$$

wo zur Abkürzung

$$a^2 + 4\pi^2 z^2 = w^2$$

geſetzt worden iſt.

Für $v = 0$ wird $z = 0$ und $w = a$, daher $\text{Const.} = -\frac{a}{4\pi} \operatorname{logn} a$, folglich der Bogen

$$v = \frac{zw}{2a} + \frac{a}{4\pi} \operatorname{logn} \frac{2\pi z + w}{a}.$$

Am Ende der erſten Windung iſt $z = a$, alſo $w = a\sqrt{(1 + 4\pi^2)}$, daher erhält man die Länge der Spirallinie, welche die erſte Windung bildet, oder wenn $\psi = 2\pi$ wird

$$= \tfrac{1}{2} a \sqrt{(1 + 4\pi^2)} + \frac{a}{4\pi} \operatorname{logn} [2\pi + \sqrt{(1 + 4\pi^2)}].$$

Am Ende der zweiten Windung iſt $z = 2a$, alſo $w = a\sqrt{(1 + 16\pi^2)}$, folglich die Länge der erſten und zweiten Windung

$$= a\sqrt{(1 + 16\pi^2)} + \frac{a}{4\pi} \operatorname{logn} [4\pi + \sqrt{(1 + 16\pi^2)}].$$

§. 61.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer zu finden.

Taf. III. Fig. 28. Aufloſung. Man ſetze, Figur 28., $AR = x$, $PM = y$, ſo iſt $x = - z \cos \psi$ und $y = z \sin \psi$.

Soll nun ψ mit z zugleich verſchwinden, ſo erhält man die gewöhnliche Gleichung $z = \frac{a\psi}{2\pi}$, daher $\partial z = \frac{a\partial\psi}{2\pi}$. Wird nun $\partial\psi$ conſtant angenommen, ſo iſt $\partial^2\psi$ und $\partial^2 z = 0$, daher

$$\partial x = - \partial z . \cos\psi + z\partial\psi . \sin\psi$$
$$\partial^2 x = 2\partial z\partial\psi . \sin\psi + z\partial\psi^2 . \cos\psi$$
$$\partial y = \partial z . \sin\psi + z\partial\psi . \cos\psi$$
$$\partial^2 y = 2\partial z\partial\psi . \cos\psi - z\partial\psi^2 . \sin\psi$$

und hieraus nach erforderlicher Züſammenziehung

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = 2\partial z^2\partial\psi + z^2\partial\psi^3$$

oder, wenn man ſtatt $\partial\psi$ ſeinen Werth $\frac{2\pi\partial z}{a}$ ſetzt,

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = \frac{4\pi}{a^3}(a^2 + 2\pi^2 z^2).$$

Nun iſt nach bekannten Regeln, wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer für den Punkt N bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y},$$

daher findet man, weil §. 60. $\partial v = \frac{\partial z}{a}\sqrt{(a^2 + 4\pi^2 z^2)}$, den Krümmungshalbmeſſer

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^2 + 4\pi^2 z^2)^3}}{4\pi(a^2 + 2\pi^2 z^2)} = \frac{a\sqrt{(1 + \psi^2)^3}}{2\pi(2 + \psi^2)}.$$

Für $\psi = 0$ oder im Pole C iſt

$$\varrho = \frac{a}{4\pi} = 0,079577 \cdot a.$$

Am Ende der erſten Windung bei A iſt $z = a$ oder $\psi = 2\pi$, daher der Krümmungshalbmeſſer

$$\varrho = \frac{a\sqrt{(1 + 4\pi^2)^3}}{\pi(1 + 2\pi^2)} = 2,8138758 \cdot a.$$

§. 62.

Aufgabe. Den Inhalt des Flächenraums zu finden, welcher zwiſchen dem Bogen CVN der archimediſchen Spirallinie, Figur 28., und der Sehne CN liegt. Taf. III. Fig. 28.

Auflöſung. Mit Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §. ſei F der geſuchte Flächeninhalt, ſo iſt

$$\partial F = \tfrac{1}{2} z^2 \partial \psi = \tfrac{1}{2} z^2 . \frac{2\pi \partial z}{a}, \text{ daher}$$

$$\text{(I)} \quad F = \frac{\pi}{a} \int z^2 \partial z = \frac{\pi z^3}{3a}$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil F mit z zugleich verſchwindet.

Für die Fläche CVNWBC, welche von der erſten Windung und dem Halbmeſſer BC = a begrenzt wird, iſt z = a, alſo

$$\text{(II)} \quad F = \tfrac{1}{3} \pi a^2$$

oder die Fläche, welche von der erſten Windung und dem Halbmeſſer des Grundkreiſes begrenzt wird, iſt dem dritten Theile vom Inhalte des Grundkreiſes gleich.

Sucht man den Inhalt derjenigen Fläche, welche zwiſchen den zuſammengehörigen Bogen CVN, BV′N′ zweier auf einander folgenden Windungen und den graden Linien CB und NN′ enthalten iſt, ſo ſei mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung CN′ = z′, die Fläche CVNN′V′BC = F′; die Fläche CN′V′BC = F″, ſo iſt

$$F' = F'' - F.$$

Aber $\partial F'' = \tfrac{1}{2} z' z' \partial \psi = \tfrac{1}{2} z' z' . \frac{2\pi \partial z'}{a}$, daher

$$F'' = \frac{\pi}{a} \int z' z' \partial z' = \frac{\pi z' z' z'}{3a} + \text{Const.}$$

Für $z' = a$ wird $F'' = 0$, alſo $Const = -\frac{\pi a^3}{3a}$, daher

$$F'' = \frac{\pi}{3a}(z'z'z' - a^3) = \frac{\pi}{3a}[(a+z)^3 - a^3]$$

weil $z' = a + z$ iſt. Aber $F = \frac{1}{3}\pi a^2 = \frac{\pi}{3a} \cdot a^3$, daher findet man $F' = F'' - F$ oder die Fläche $CVNN'V'BC$

$$(III)\ F' = \frac{\pi}{3a}[(a+z)^3 - 2a^3].$$

Für $z = a$ erhält man die ganze Fläche, welche zwiſchen der erſten und zweiten Windung enthalten, und durch BC und die Verlängerung von CB begrenzt wird, oder

$$(IV)\ F' = 2\pi a^2.$$

II. Von den paraboliſchen Spirallinien.

§. 63.

Die verſchiedenen Gattungen der paraboliſchen Spirallinien hängen von der Ordnung der Parabel ab, welche als Erzeugungslinie angenommen wird, dabei hat aber jede Gattung wieder verſchiedene Arten, welche durch die Lage der Erzeugungslinie gegen die Axe der Spirallinie beſtimmt werden.

Zu den paraboliſchen Spirallinien erſter Gattung kann man diejenigen rechnen, bei welchen die erzeugende Linie eine gemeine oder apolloniſche Parabel iſt, daher die entſtandene Spirallinie auch eine gemeine paraboliſche genannt werden kann.

Unter den gemeinen paraboliſchen Spirallinien erſter Art werden hier diejenigen verſtanden, bei welchen die

Axe der Spirallinie Tangente vom Scheitel der Parabel iſt, und unter dieſen Linien zweiter Art verſteht man diejenigen, wo die Axe der Spirallinie mit der Parabelaxe zuſammenfällt. Nur dieſe Linien wird man hier unterſuchen.

§. 64.

Aufgabe. Die Gleichung für die gemeinen paraboliſchen Spirallinien erſter Art zu finden.

Aufloͤſung. Es ſei, Figur 30., CP die Axe der Spirallinie, welche die gemeine Parabel KAQ im Scheitel bei A berühret. Iſt nun $CA = a$, $AB' = b$ und $B'D = B'D' = c$, ſo daß b, c bekannte Koordinaten der Erzeugungslinie ſind, ſo kann für jeden Werth $PQ = u$ und $CP = z$ der zugehörige Punkt N in der Spirallinie gefunden werden, wenn ψ den zu u gehörigen Bogen des Grundkreiſes bezeichnet. Denn es verhält ſich §. 55. Taf. III. Fig. 30. a b c

$$b : u = 2\pi : \psi.$$

Nimmt man daher den Bogen $AM = \psi = \frac{2\pi u}{b}$ (indem man den Halbmeſſer dieſes Bogens $= 1$ ſetzt), zieht durch M die Linie CM, und trägt auf die Verlängerung derſelben $CN = CP$, ſo iſt N der geſuchte Punkt.

Für $P'Q' = u$ findet man auf ähnliche Art den Punkt N'.

Nun verhält ſich bei der Parabel

$$AB' : AQ'' = (B'D')^2 : (Q''Q)^2 \text{ oder}$$

$$AB' : PQ = (B'D')^2 : (CP - CA)^2, \text{ daher}$$

$$b : u = c^2 : (z - a)^2.$$

Eben ſo verhält ſich

$$AB' : P'Q' = (B'D)^2 : (Q''Q')^2 \text{ oder}$$
$$b : u = c^2 : (a - z)^2.$$

Aus beiden Proportionen findet man

$z = a \pm c \sqrt{\frac{u}{b}}$. Weil aber $\frac{u}{b} = \frac{\psi}{2\pi}$ iſt, ſo erhält man hieraus die allgemeine Gleichung

$$(I)\ z = a \pm c \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}},$$

ſo daß für jeden Bogen ψ zwei Polarabſtände oder zwei Punkte in der Spirallinie gefunden werden. Nur für $\psi = 0$ erhält z den einzigen Werth $= a$.

Taf. IV. Fig. 31. Für $c = a$ wird $B'D = CA$, Figur 30., oder der Punkt D fällt mit K zuſammen, wie Figur 31. In dieſem Falle erhält man für den Polarabſtand die beſondere Gleichung

$$(II)\ z = a\left(1 \pm \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}}\right).$$

Fig. 32. Fällt hingegen der Scheitel A in den Pol C, wie Figur 32., ſo wird $a = 0$, und man erhält für dieſen Fall die ſehr einfache Gleichung

$$(III)\ z = \pm c \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}} \text{ oder } z^2 = \frac{c^2\psi}{2\pi},$$

wo für $\psi = 0$ auch $z = 0$ wird. Bei dieſer Spirale verhalten ſich die Quadrate der Polarabſtände wie die zugehörigen Bogen des Grundkreiſes, oder die Polarabſtände ſind Ordinaten einer Parabel, deren Abſciſſen durch ψ, und deren Parameter durch $\frac{c^2}{2\pi}$ ausgedrückt wird.

§. 65.

Für irgend einen Bogen ψ iſt der Polarabſtand $z = a \pm c \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}}$. Wächſt nun ψ um 2π, und der

dazu gehörige Polarabſtand iſt z', ſo fällt z mit z' zuſammen, und $z' - z$ iſt der Abſtand zweier auf einander folgenden Windungen der Spirallinie auf einerlei verlängerten Halbmeſſer des Grundkreiſes gemeſſen.

Nun iſt $z' = a \pm c \sqrt{\frac{\psi + 2\pi}{2\pi}}$, daher der Abſtand

$$z' - z = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} [\pm \sqrt{(\psi + 2\pi)} \mp \sqrt{\psi}]$$

Für $\psi = \infty$ wird dieſer Abſtand $= 0$, daher verſchwindet die Differenz der Polarabſtände, oder die Windungen fallen in einander, wenn die Spirallinie unzählig viele Windungen gemacht hat.

§. 66.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für die gemeine paraboliſche Spirallinie erſter Art zu finden.

Auflöſung. Es ſei NT, Figur 30., die zum Punkte N gehörige Tangente, $CN = z$, der dazu gehö- Bogen des Grundkreiſes $AM = \psi$, und der geſuchte Winkel $CNT = \omega$. Wächſt nun ψ um $Mm = \partial\psi$, und man zieht No ſenkrecht auf Cn, ſo iſt $on = \partial z$ und $No = z\partial\psi$. Ferner iſt §. 64. (I) Taf. III. Fig. 30.

$$(z - a)^2 = z^2 - 2az + a^2 = \frac{c^2\psi}{2\pi}, \text{ daher}$$

$$2z\partial z - 2a\partial z = \frac{c^2\partial\psi}{2\pi}, \text{ alſo } \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{4\pi(z - a)}{c^2}.$$

Nun iſt $\operatorname{tgt} \omega = \frac{No}{on} = \frac{z\partial\psi}{\partial z}$, daher findet man

$$\text{(I) } \operatorname{tgt} \omega = \frac{4\pi(z - a)z}{c^2}.$$

Für $a = 0$, oder wenn der Scheitel der Erzeugungslinie in den Pol fällt, iſt

$$\text{(II) } \operatorname{tgt} \omega = \frac{4\pi z^2}{c^2}.$$

§. 67.

Aufgabe. Den Bogen für die gemeine paraboliſche Spirallinie erſter Art zu finden.

Auflöſung. Für denjenigen Punkt der Spirallinie, welcher in den Pol fällt, ſei der Bogen ψ des Grundkreiſes $= 0$, ſo iſt hier $z^2 = \frac{c^2 \psi}{2\pi}$, daher

$$\partial \psi = \frac{4\pi z}{c^2} \partial z.$$

Taf. IV. Fig. 32. Setzt man den Bogen CWN = v, Figur 32., ſo findet man wie §. 60.

$\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + z^2 \partial \psi^2)}$, oder es iſt, wenn ſtatt $\partial \psi$ der gefundene Werth geſetzt wird,

$$\partial v = \frac{\partial z}{c^2} \sqrt{(c^4 + 16\pi^2 z^4)}$$

wovon das Integral nur durch Reihen beſtimmt werden kann.

§. 68.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer für die gemeine paraboliſche Spirallinie erſter Art zu finden.

Auflöſung. Für den Fall, daß der Bogen ψ des Grundkreiſes mit dem Polarabſtande z zugleich verſchwindet, ſetze man, Figur 32., für den Punkt N, CR = x und RN = y, ſo erhält man wie §. 61.

$$\partial x = - \partial z . \cos \psi + z \partial \psi . \sin \psi$$
$$\partial y = \partial z . \sin \psi + z \partial \psi . \cos \psi$$

und hieraus, wenn $\partial \psi$ conſtant angenommen wird,

$$\partial^2 x = 2 \partial z \partial \psi . \sin \psi - \partial^2 z . \cos \psi + z \partial \psi^2 . \cos \psi$$
$$\partial^2 y = 2 \partial z \partial \psi . \cos \psi + \partial^2 z . \sin \psi - z \partial \psi^2 . \sin \psi,$$

daher

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = 2 \partial z^2 \partial \psi - z \partial^2 z \partial \psi + z^2 \partial \psi^3.$$

Nun iſt $z^2 = \frac{c^2 \psi}{2\pi}$, alſo $\partial z = \frac{c^2 \partial \psi}{4\pi z}$ und

$$\partial^2 z = - \frac{c^2 \partial \psi \partial z}{4\pi z^2} = - \frac{\partial z^2}{z}$$

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = \frac{4\pi z \partial z^3}{c^6} (3 c^4 + 16 \pi^2 z^4).$$

Es iſt aber nach §. 67.

$$\partial v = \frac{\partial z}{c^2} \sqrt{(c^4 + 16\pi^2 z^4)},$$

daher, wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y} \text{ oder}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{(c^4 + 16\pi^2 z^4)^3}}{4\pi z (3c^4 + 16\pi^2 z^4)}.$$

§. 69.

Aufgabe. Den Inhalt derjenigen Fläche zu finden, welcher von dem Bogen AWN, Figur 30., der gemeinen paraboliſchen Spirale erſter Art und den Halbmeſſern AC und CN eingeſchloſſen iſt. Taf. III. Fig. 30.

Auflöſung. Man ſetze die Fläche ACNWA = F, ſo iſt $\partial F = \frac{1}{2} z^2 \partial \psi$, oder es iſt, wenn aus §. 67. ſtatt $\partial \psi$ ſein Werth geſetzt wird,

$$\partial F = \frac{1}{2} z^2 . \frac{4\pi (z - a)}{c^2} \partial z = \frac{2\pi}{c^2} (z^3 - a z^2) \partial z, \text{ alſo}$$

$$F = \frac{2\pi}{c^2} \int (z^3 - a z^2) \partial z = \frac{2\pi}{c^2} (\tfrac{1}{4} z^4 - \tfrac{1}{3} a z^3) + \text{Const.}$$

Für $z = a$ wird $F = 0$, alſo $\text{Const} = \frac{1}{12} . \frac{2\pi a^4}{c^2}$, daher iſt die geſuchte Fläche

$$F = \frac{\pi}{6c^2} (3z^4 - 4az^3 + a^4).$$

§. 70.

Aufgabe. Eine Gleichung für die gemeine paraboliſche Spirallinie zweiter Art zu finden.

Taf. IV. Fig. 33. Auflöſung. Es ſei C, Figur 33., der Pol, und CP' die Axe der Spirallinie, in welche zugleich die Axe der Parabel AQ' fällt. Ferner ſei $CB = a$, $BB' = b$, $CA = c$, und für den Grundkreis der Bogen $BM = \psi$, deſſen Halbmeſſer $= 1$ iſt, ſo erhält man für irgend einen Werth $PQ = u$ den zugehörigen Punkt N der Spirallinie auf die bekannte Weiſe, wenn man $BM = \psi = \frac{2\pi u}{b}$ beſtimmt, und $CP = z$ auf CM aus C nach N trägt. Jeder andere Punkt N′ wird auf eine ähnliche Art gefunden. Nun verhält ſich nach den Eigenſchaften der Parabel

$$(BB')^2 : (PQ)^2 = AB : AP \text{ oder}$$
$$(BB')^2 : (PQ)^2 = CB - CA : CP - CA, \text{ daher}$$
$$b^2 : u^2 = a - c : z - c.$$

Eben ſo verhält ſich

$$(BB')^2 : (P'Q')^2 = AB : AP'$$
$$b^2 : u^2 = a - c : z - c$$

es iſt daher $u^2 = \frac{b^2 (z - c)}{a - c}$. Aber $u = \frac{b\psi}{2\pi}$ oder $u^2 = \frac{b^2 \psi^2}{4\pi^2}$, daher

$$\frac{b^2 (z - c)}{a - c} = \frac{b^2 \psi^2}{4\pi^2}, \text{ und hieraus}$$

$$\text{(I) } z = c + \frac{(a - c)\,\psi^2}{4\pi^2}.$$

Fig. 34. Fällt der Scheitel A der Parabel in den Pol C, wie Figur 34., ſo wird $c = 0$. Daher iſt in dieſem Falle

$$\text{(II) } z = \frac{a\,\psi^2}{4\,\pi^2},$$

wo mit $\psi = 0$ auch $z = 0$ wird.

§. 71.

Sind z und z′ die Polarabſtände zweier auf einander folgenden Windungen, ſo daß z und z′ in einerlei Halbmeſſer des Grundkreiſes fallen, ſo iſt für

$$z = c + \frac{(a-c)\,\psi^2}{4\pi^2},\quad z' = c + \frac{(a-c)(\psi+2\pi)^2}{4\pi^2},$$

daher der Abſtand zweier auf einander folgenden Windungen, oder

$$z' - z = \frac{a-c}{\pi}(\psi + \pi).$$

Dieſe Abſtände wachſen alſo mit dem Polarwinkel ψ.

§. 72.

Aufgabe. Die Lage der Tangente bei einer gemeinen paraboliſchen Spirallinie zweiter Art zu finden.

Auflöſung. Für den Punkt N, Figur 33., ſei NT die geſuchte Tangente, welche mit dem Polarabſtand CN = z den Winkel CNT = ω einſchließt. Wächſt nun ψ um Mm = $\partial\psi$, ſo iſt, wie §. 59., on = ∂z und No = $z\partial\psi$, daher wird Taf. IV. Fig. 33.

$$\operatorname{tgt}\omega = \frac{No}{on} = \frac{z\partial\psi}{\partial z}.$$

Nun erhält man, wenn die Gleichung (I) §. 70. differenziirt wird,

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{2\pi^2}{(a-c)\,\psi} \text{ oder weil } \psi = 2\pi\sqrt{\frac{z-c}{a-c}} \text{ iſt,}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\pi}{\sqrt{[(a-c)(z-c)]}}, \text{ daher}$$

$$\text{(I)}\ \operatorname{tgt}\omega = \frac{\pi z}{\sqrt{[(a-c)(z-c)]}} = \frac{4\pi^2 c + (a-c)\,\psi^2}{2(a-c)\,\psi}.$$

Für c = 0 wird

$$\text{(II)}\ \operatorname{tgt}\omega = \pi\sqrt{\frac{z}{a}} = \tfrac{1}{2}\psi.$$

§. 73.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der gemeinen paraboliſchen Spirallinie zweiter Art zu finden.

Auflöſung. Soll der geſuchte Bogen mit $\psi = 0$ verſchwinden, ſo muß die Gleichung $z = \frac{a\psi^2}{4\pi^2}$ zur Grundlage dienen, alsdann iſt

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{a\psi}{2\pi^2}, \text{ alſo } \frac{\partial z^2}{\partial \psi^2} = \frac{a^2\psi^2}{4\pi^4} = \frac{az}{\pi^2}.$$

Man ſetze, Figur 34., den Bogen $AN = v$, ſo iſt, wie §. 60.,

$\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + z^2 \partial \psi^2)}$, oder, wenn ſtatt $\partial \psi^2$ der gefundene Werth geſetzt wird,

$\partial v = \partial z \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a} z\right)}$, daher

$v = \int \partial z \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a} z\right)} = \frac{2a}{3\pi^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a} z\right)^3} + \text{Const.}$

Für $z = 0$ wird $v = 0$, alſo $\text{Const.} = -\frac{2a}{3\pi^2}$, daher iſt der geſuchte Bogen

$v = \frac{2a}{3\pi^2} \left[\left(1 + \frac{\pi^2 z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{2a}{3\pi^2} \left[\sqrt{\left(1 + \tfrac{1}{4}\psi^2\right)^3} - 1\right].$

Für $z = a$ oder $\psi = 2\pi$, alſo für die erſte Windung, wird

$$v = \frac{2a}{3\pi^2} \left[\sqrt{(1 + \pi^2)^3} - 1\right].$$

§. 74.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer für die gemeine paraboliſche Spirallinie zweiter Art zu finden.

Auflöſung. In der Vorausſetzung, daß z mit ψ zugleich verſchwinde, bezeichne man die zum Punkte N, Figur 34., gehörigen rechtwinklichten Koordinaten durch

Taf. IV. Fig. 34.

x, y, ſo iſt, wie §. 68., wenn $\partial\psi$ conſtant angenommen wird

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = 2\partial z^2\partial\psi - z\partial^2 z\partial\psi + z^2\partial\psi^3.$$

Aber $z = \frac{a\psi^2}{4\pi^2}$, daher $\partial z = \frac{a\psi\partial\psi}{2\pi^2}$ und $\partial^2 z = \frac{a\partial\psi^2}{2\pi^2}$.

Ferner iſt $\partial z^2 = \frac{a^2\psi^2\partial\psi^2}{4\pi^4} = \frac{az\partial\psi^2}{\pi^2}$, daher

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = \frac{z\partial\psi^3}{2\pi^2}(3a + 2\pi^2 z)$$

und weil §. 73.

$$\partial v = \partial z\sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a}z\right)} = \frac{\partial\psi\sqrt{az}}{\pi}\sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2 z}{a}\right)} = \frac{\partial\psi}{\pi}\sqrt{(az + \pi^2 z^2)},$$

ſo erhält man, wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y}, \text{ oder}$$

$$\varrho = \frac{2\sqrt{(az + \pi z^2)^3}}{\pi z(3a + 2\pi^2 z)},$$

und für $z = a$

$$\varrho = \frac{2a\sqrt{(1 + \pi^2)^3}}{\pi(3 + 2\pi^2)}.$$

§. 75.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche zu finden, welche von dem Bogen AWN, Figur 33., der gemeinen parabolischen Spirallinie zweiter Art, und den Halbmeſſern CA und CN eingeſchloſſen wird. Taf. IV. Fig. 33.

Auflöſung. Man ſetze die Fläche ACNWA = F, ſo iſt $\partial F = \frac{1}{2}z^2\partial\psi$, oder weil §. 72.

$$\partial\psi = \frac{\pi\partial z}{\sqrt{(a-c)}\sqrt{(z-c)}}$$ iſt, ſo findet man

$$F = \frac{\pi}{2\sqrt{(a-c)}}\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(z-c)}},$$ oder wenn $z - c = w$ geſetzt wird

$$\int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(z-c)}} = \int \left(w^{\frac{3}{2}} + 2cw^{\frac{1}{2}} + c^2 w^{-\frac{1}{2}}\right) \partial w$$
$$= \tfrac{2}{5} w^{\frac{5}{2}} + \tfrac{4}{3} c w^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} c^2 w^{\frac{1}{2}}$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $z = c$ auch w und F verſchwindet. Man erhält daher

$$\text{(I) } F = \frac{\pi}{60} \left(12z^2 + 16cz - 13c^2\right) \sqrt{\frac{z-c}{a-c}}.$$

Für $c = 0$ wird

$$\text{(II) } F = \tfrac{1}{5} \pi z^2 \sqrt{\frac{z}{a}},$$

alſo für $z = a$; dieſe Fläche $= \tfrac{1}{5} \pi a^2$.

III. Von der hyperboliſchen Spirallinie.

§. 76.

So wie es verſchiedene Gattungen der paraboliſchen Spirallinien giebt, eben ſo kann man die hyperboliſchen, bei welchen die Erzeugungslinie ein Hyperbel iſt, in verſchiedene Gattungen, und nach der Lage dieſer Erzeugungslinie noch in beſondere Arten eintheilen. Hier wird lediglich von derjenigen hyperboliſchen Spirallinie die Rede ſeyn, bei welcher die ſenkrechten Halbmeſſer CA, CA', Figur 35., Aſymptoten einer gemeinen gleichſeitigen Hyperbel $QB'Q'$ ſind, und man wird die erzeugte Spirallinie zur Unterſcheidung von den übrigen die gemeine hyperboliſche Spirallinie nennen.

Taf. IV. Fig. 35.

Sobald $CA = a$ und $AB' = b$ gegeben ſind, ſo läßt ſich nach §. 55. die Spirallinie $N'NAY$ aus den Werthen $PQ = u$ und $CP = z$ leicht beſchreiben. Nun verhält ſich bei der gleichſeitigen Hyperbel

AB′ : PQ = CP : CA, oder

b : u = z : a, daher iſt

$$u = \frac{ab}{z}.$$

Für den Punkt N der Spirallinie iſt der Bogen des Grundkreiſes AXM = ψ, und §. 55.

$$u = \frac{b\psi}{2\pi},$$

daher findet man die Gleichung für die Polarabſtände der gemeinen hyperboliſchen Spirallinie

$$z = \frac{2\pi a}{\psi}.$$

Es verhalten ſich alſo die Polarabſtände z umgekehrt, wie die zugehörigen Bogen des Grundkreiſes, daher man dieſe Linie auch eine umgekehrte archimediſche Spirallinie nennt.

Für $\psi = 0$ wird $z = \infty$.

Für $\psi = 2\pi$ wird $z = a$,

und für $\psi = 4\pi;\ 6\pi;\ 8\pi;\ 10\pi;\ \ldots$

wird $z = \frac{1}{2}a;\ \frac{1}{3}a;\ \frac{1}{4}a;\ \frac{1}{5}a;\ \ldots$

Für $z = 0$ wird $\psi = \infty$, es muß daher die Spirallinie unzählig viel Windungen um den Pol machen, bevor ſie ihn erreichen kann.

§. 77.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für die gemeine hyperboliſche Spirallinie zu finden.

Auflöſung. Für den Punkt N, Figur 35., ſei NT die Tangente, und der Winkel CNT = ω. Wächſt nun der Bogen AXM = ψ um Mm = $\partial\psi$, ſo iſt Nn der zugehörige Zuwachs des Spiralbogens, und wenn Taf. IV. Fig. 35.

no ſenkrecht auf Cn gezogen wird, $No = \partial z$ und $no = z\partial\psi$, daher

$$\mathrm{tgt}\; nNo = \frac{no}{No} = \frac{z\partial\psi}{\partial z}.$$

Aber $nNo = 180^\circ - \omega$, alſo

$$\mathrm{tgt}\; nNo = \mathrm{tgt}\,(180^\circ - \omega) = -\,\mathrm{tgt}\,\omega.$$

Ferner erhält man, weil $z\psi = 2\pi a$,

$z\partial\psi + \psi\partial z = 0$, alſo $\frac{z\partial\psi}{\partial z} = -\psi$, folglich

$\mathrm{tgt}\; nNo = -\,\mathrm{tgt}\,\omega = -\,\psi$, oder

$$\mathrm{tgt}\,\omega = \psi = \frac{2\pi a}{z}.$$

§. 78.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der gemeinen hyperboliſchen Spirallinie zu finden.

Auflöſung. Weil für $\psi = 0$, $z = \infty$ wird, ſo muß auch in dieſem Falle der zugehörige Spiralbogen unendlich groß werden. Zur leichteren Beſtimmung der Bogenlängen ſetze man in dem Grundkreiſe den Bogen $AA'M = \psi'$, ſo iſt, weil $AXM = \psi$,

$$\psi = 2\pi - \psi', \text{ folglich}$$

$$z = \frac{2\pi a}{2\pi - \psi'}.$$

Setzt man nun den Spiralbogen $AZN = v'$, ſo iſt, wenn ψ' um $Mm' = \partial\psi'$ wächſt, $Nn' = \partial v'$. Aber $No' = z\partial\psi'$ und $o'n' = \partial z$, daher

$$Nn' = \partial v' = \sqrt{(z^2\partial\psi'^2 + \partial z^2)}.$$

Nun iſt $2\pi z - z\psi' = 2\pi a$, alſo

$2\pi\partial z - \psi'\partial z - z\partial\psi' = 0$, daher

$z\partial\psi' = (2\pi - \psi')\,\partial z = \frac{2\pi a\partial z}{z}$, folglich

$\partial v'$

$$\partial v' = \partial z \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 a^2}{z^2} + 1\right)} = \frac{\partial z}{z} \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)} \text{ oder}$$

$$\partial v' = \frac{(4\pi^2 a^2 + z^2)\partial z}{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} = \frac{z\partial z}{\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} + \frac{4\pi^2 a^2 \partial z}{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}$$

Es iſt aber $\int \frac{z\partial z}{\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} = \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)} + \text{Const.}$
und P. A. S. 161. III.

$$\int \frac{\partial z}{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} = -\frac{1}{2\pi a} \operatorname{logn} \frac{2\pi a + \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}{z} + \text{Const.},$$

daher

$$v' = \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)} - 2\pi a \operatorname{logn} \frac{2\pi a + \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}{z} + \text{Const.}$$

Für $z = a$ wird $v' = 0$, alſo

$$\text{Const.} = -a\sqrt{(4\pi^2 + 1)} + 2\pi a \operatorname{logn} [2\pi + \sqrt{(4\pi^2 + 1)}],$$

folglich iſt der Bogen AZN, oder

$$v' = \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)} - a\sqrt{(4\pi^2 + 1)} + 2\pi a \operatorname{logn} \frac{2\pi z + z\sqrt{(4\pi^2 + 1)}}{2\pi a + \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}.$$

§. 79.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer für die gemeine hyperboliſche Spirallinie zu finden.

Auflöſung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. erhält man wie §. 68.

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = 2\partial z^2 \partial \psi' - z\partial^2 z \partial \psi' + z^2 \partial \psi'^3.$$

Nun iſt nach §. 78.

$\partial \psi' = \frac{2\pi a \partial z}{z^2}$, und weil $\partial \psi'$ conſtant iſt,

$\partial^2 z = \frac{z\partial z \partial \psi'}{\pi a} = \frac{2\partial z^2}{z}$, daher

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = \frac{8\pi^3 a^3 \partial z^3}{z^4}$. Aber §. 78.

$\partial v' = \frac{\partial z}{z} \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}$, daher iſt, wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v'^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}, \text{ folglich}$$

$$\varrho = \frac{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)^3}}{8\pi^3 a^3}.$$

§. 80.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ACNZA, Figur 35., zu finden, welche von der gemeinen hyperboliſchen Spirallinie und den Halbmeſſern AC, CN begrenzt wird.

Taf. IV. Fig. 35.

Auflöſung. Man ſetze die Fläche ACNZA $= F'$, ſo iſt $\partial F' = \frac{1}{2} z^2 \partial \psi'$, oder weil §. 79. $\partial \psi' = \frac{2\pi a \partial z}{z^2}$, ſo wird $\partial F' = \pi a \partial z$, folglich $F' = \pi a z +$ Const. Für $z = a$ wird $F' = 0$, alſo Const. $= - \pi a^2$, daher findet man die Fläche

$$F' = \pi a (z - a).$$

IV. Von der logarithmiſchen Spirallinie.

§. 81.

Unter den verſchiedenen logarithmiſchen Spirallinien wird hier nur diejenige unterſucht werden, bei welcher die Erzeugungslinie eine gewöhnliche logarithmiſche Linie B′AQ′, Figur 36., eine ſolche Lage gegen die Axe BC der Spirallinie hat, daß die im Pole C auf BC ſenkrechte Linie EK die Aſymptote der logarithmiſchen Linie, und zugleich die Abſciſſenaxe für den Anfangspunkt C iſt. Wird nun $CA = 1$, $CB = a$ und $BB' = b$ geſetzt, ſo kann für jeden Werth $PQ = u$ nach §. 55. der zugehörige Punkt N der Spirallinie gefunden werden, indem man mit dem Halbmeſſer CA den Bogen $AM = \psi$ des Grundkreiſes beſchreibt, und

Fig. 36.

$$\psi = \frac{2\pi u}{b}$$

nimmt, woraus ſich $CN = CP = z$ findet. Um die

Gleichung für dieſe Spirallinie anzugeben, ſetze man, daß Q Q′ nach §. 48. IV. eine logarithmiſche Linie ſei, bei welcher ſich alsdann die Abſciſſen (C Q″) wie die Logarithmen der Ordinaten (Q″ Q) verhalten. Alſo

$$CE : CQ'' = \log EB' : \log Q''Q \text{ oder}$$
$$b : u = \log a : \log z \text{ daher}$$
$$\log z = \frac{u \log a}{b}, \text{ oder}$$
$$u = \frac{b\psi}{2\pi} = \frac{b \log z}{\log a},$$

folglich erhält man die Gleichung für die gemeine logarithmiſche Spirallinie

$$\log z = \frac{\psi \log a}{2\pi},$$

wo ſich die angedeuteten Logarithmen auf einerlei logarithmiſches Syſtem oder auf eine gemeinſchaftliche Grundzahl beziehen müſſen. Uebrigens verhalten ſich bei dieſer Spirallinie die Polarwinkel wie die Logarithmen der zugehörigen Polarabſtände.

Für $\psi = 0$ wird $\log z = 0$, alſo $z = 1 = CA$.

Iſt ψ negativ, ſo wird z kleiner als 1, und für $\psi = -\infty$ wird $z = 0$, daher macht die Spirallinie von A ab unzählig viele Windungen, bis ſie den Pol C erreicht.

§. 82.

Für zwei auf einander folgende Windungen, deren Polarabſtände z, z′ in einerlei Verlängerung des Halbmeſſers vom Grundkreiſe fallen, ſei

$$\log z = \frac{\log a}{2\pi}\psi, \text{ ſo iſt } \log z' = \frac{\log a}{2\pi}(\psi + 2\pi),$$

alſo $\log z' - \log z = \log a$ oder $\log \frac{z'}{z} = \log a$,

daher $\frac{z'}{z} = a$.

Das Verhältniß zweier Polarabſtände für auf einander folgende Windungen iſt daher durchgängig unveränderlich.

Bezeichnen daher z, z', z'', z''', ... die auf einander folgenden Polarabſtände, welche auf einerlei Linie gemeſſen werden, ſo verhält ſich

$$z : z' = 1 : a$$
$$z' : z'' = 1 : a$$
$$z'' : z''' = 1 : a \text{ u. ſ. w., daher}$$

$z : z' = 1 : a$; $z : z'' = 1 : a^2$; $z : z''' = 1 : a^3$ u. ſ. w.; uud hieraus erhält man

$z' = az$; $z'' = a^2 z$; $z''' = a^3 z$; $z'''' = a^4 z$ u. ſ. w.; die auf einerlei Linie gemeſſenen Polarabſtände bilden daher eine geometriſche Reihe, deren Exponent $\frac{1}{a}$ iſt.

§. 83.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für die logarithmiſche Spirallinie zu finden.

Auflöſung. Der Winkel, welchen die Tangente
Taf. IV. Fig. 36. NT, Figur 36., mit dem Polarabſtand NC einſchließt, ſei ω, ſo iſt, wie §. 66., $\operatorname{tgt} \omega = \frac{z \partial \psi}{\partial z}$. Aus der Gleichung des vorhergehenden §. erhält man aber

$$\partial \log z = m \frac{\partial z}{z} = \frac{\partial \psi . \log a}{2\pi} \text{ (P. A. S. 56.)}$$

wo m die Subtangente der logarithmiſchen Linie, oder den Model desjenigen logarithmiſchen Syſtems bezeichnet, auf welches ſich die logarithmiſche Linie bezieht. Für die natürlichen Logarithmen iſt $m = 1$, und für die gemeinen oder briggiſchen iſt $m = 0{,}43429448$.

Man erhält daher $\frac{z \partial \psi}{\partial z} = \frac{2\pi m}{\log a}$, folglich

$$\operatorname{tgt} \omega = \frac{2\pi m}{\log a}.$$

Der Winkel, welchen die Tangente mit dem Polarabſtande einſchließt, iſt daher für alle Punkte der Spirallinie gleich groß. Für die briggiſchen Logarithmen wird

$$2\pi m = 2{,}7287527.$$

§. 84.

Aufgabe. Die Gleichung für diejenige Spirallinie zu finden, bei welcher die Tangente mit dem Polarabſtande durchgängig einen Winkel von 30 Grad einſchließt.

Auflöſung. Weil $\operatorname{tgt} \omega = \frac{2\pi m}{\log a}$ und $\operatorname{tgt} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ſo erhält man $\frac{2\pi m}{\log a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, oder $\log a = 2\pi m \sqrt{3}$, daher §. 81.

$$\log z = \frac{\psi \log a}{2\pi} = m \psi \sqrt{3}.$$

Für die natürlichen Logarithmen iſt $m = 1$, alſo

$$\operatorname{logn} z = \psi \sqrt{3},$$

und für die briggiſchen

$$\log z = 0{,}7522201\ \psi, \text{ oder auch}$$

$$\log z = 4{,}7262649\ \frac{\psi}{2\pi}.$$

Bedeutet ψ° die Anzahl der Grade, welche dem Bogen ψ entſprechen, ſo iſt $\frac{\psi^\circ}{360} = \frac{\psi}{2\pi}$, und man kann hienach folgende Tafel für verſchiedene Werthe von ψ° berechnen.

ψ°	z	ψ°	z
0°	1, 0000	65°	7, 1345
5°	1, 1632	70	8, 2986
10	1, 3530	75	9, 6526
15	1, 5737	80	11, 2276
20	1, 8305	85	13, 0596
25	2, 0939	90	15, 1906
30	2, 4766	95	17, 6692
35	2, 8814	100	20, 5523
40	3, 3508	105	23, 9058
45	3, 8975	110	27, 8065
50	4, 5335	115	32, 3436
55	5, 2732	120	37, 6211
60	6, 1336	125	43, 7598

Mittelſt dieſer Tafel kann man für die Winkel ψ° die zugehörigen Werthe z auftragen, und eine logarithmiſche Spirale CNP, Figur 37., von der verlangten Eigenſchaft zeichnen.

Taf. IV. Fig. 37.

Stellt man ſich vor, daß um den Pol C eine der CNP gleiche aber umgekehrt gezeichnete Spirallinie CNQ beweglich ſei, ſo haben dieſe beide Linien die Eigenſchaft, daß bei jedem Durchſchnittspunkte N die Tangenten beider Spirallinien einander unter einem Winkel TNT′ von 60 Grad ſchneiden.

Anmerkung. Zum beſſern Mahlen des Getreides verlangt man, daß ſich die in die Mühlenſteine gehauene Strahlen oder Hauſchläge durchgängig unter einem Winkel von 60 Grad ſchneiden ſollen. Dies

kann dadurch bewirkt werden, wenn man die hier beſchriebene logarithmiſche Spirale auf ein ebenes Brett zeichnet, und danach eine Lehre (Chablone) verfertigt, nach welcher die Hauſchläge bearbeitet werden können.

§. 85.

Aufgabe. Die Länge des Bogens für die gemeine logarithmiſche Spirallinie zu finden.

Auflöſung. Man bezeichne die Länge des Bogens AN, Figur 36., durch v, ſo iſt wie §. 60. Taf. IV. Fig. 36.

$\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + z^2 \partial \psi^2)}$. Aber $\partial \psi = \frac{2\pi m \partial z}{z \log a}$, daher

$\partial v = \frac{\partial z}{\log a} \sqrt{(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)}$, alſo

$$v = \frac{z}{\log a} \sqrt{(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)} + \text{Const.}$$

Für $\psi = 0$ wird $v = 0$ und $z = 1$, daher findet man die Länge des Bogens

$$v = \frac{z - 1}{\log a} \sqrt{(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)}.$$

§. 86.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmeſſer für die gemeine logarithmiſche Spirallinie zu finden.

Auflöſung. Der geſuchte Krümmungshalbmeſſer für den Punkt N, Figur 36., ſei $= \varrho$, ſo iſt wie §. 68., wenn $\partial \psi$ conſtant geſetzt wird,

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = 2 \partial z^2 \partial \psi - z \partial^2 z \partial \psi + z^2 \partial \psi^3$.

Nun iſt ferner

$\partial z = \frac{z \partial \psi \log a}{2\pi m}$, alſo $\partial^2 z = \frac{\partial z \partial \psi \log a}{2\pi m} = \frac{\partial z^2}{z}$,

daher

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = \frac{2\pi m}{z \log a^2} (\log a^2 + 4\pi^2 m^2) \partial z^3.$$

Aber auch §. 85.

$$\partial v = \frac{\partial z}{\log a} \sqrt{(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)},$$ daher erhält man, weil

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y},$$

den Krümmungshalbmeſſer

$$\varrho = \frac{z}{2\pi m} \sqrt{(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)}.$$

§. 87.

Taf. IV. Fig. 36. Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ACNA, Figur 36., zu finden, welche von dem Spiralbogen AN und den Halbmeſſern CA und CN eingeſchloſſen iſt.

Auflöſung. Man ſetze die Fläche $ACNA = F$, ſo iſt $\partial F = \frac{1}{2} z^2 \partial \psi = \frac{1}{2} z^2 \frac{2\pi m \partial z}{z \log a}$ (§. 85.), daher

$$F = \frac{\pi m}{\log a} \int z \partial z = \frac{\pi m}{2 \log a} z^2 + \text{Const.}$$

Für $z = 1$ wird $F = 0$, alſo $\text{Const.} = \frac{-\pi m}{2 \log a}$, daher die Fläche

$$F = \frac{\pi m}{2 \log a} (z^2 - 1).$$

Ueber die Eigenſchaften der Spirallinien kann man nachſehen:

Varignon, Nouvelle formation de Spirales. Mém. de l'acad. de Paris. Année 1704. pag. 91 — 181. ed. bat.

Karſten angef. mathematiſche Analyſis. S. 329 — 354.

Sechster Abſchnitt.

Von der Kettenlinie.

§. 88.

Eine vollkommen biegſame aber unausdehnbare ſchwere Schnur oder aus äußerſt kleinen Gliedern beſtehende Kette ſei in den Punkten B, D, Figur 38., aufgehängt, ſo bildet ſolche eine Kettenlinie (Catenaria, *Chainette*) BAD. Taf. V. Fig. 38.

Man ziehe zu irgend einem Punkte M derſelben die Tangente Mt, ſo giebt dieſe Linie die Richtung an, nach welcher die Schnur im Punkte M geſpannt wird, und eine Kraft T im Punkte M nach der Linie Mt angebracht, welche auf den Punkt M eben ſo, wie das Gewicht der Kette MAD auf die Schnur wirkt, heißt die Spannung im Punkte M. Brächte man die Kraft T nach der Richtung Mt an, ſo könnte man die Kette MAD wegnehmen, und die Spannung T würde mit der übrigbleibenden Kette MB im Gleichgewichte ſeyn; ſo wie nach Wegnahme der Kette BM die Kraft T nach der Richtung MT mit dem Stücke MAC von der Kette im Gleichgewichte wäre.

Es ſei A der tiefſte Punkt der Kette oder der Scheitel von der krummen Linie BAD, durch welchen die Vertikallinie AC gezogen iſt. Ferner ſei BC und MP auf AC ſenkrecht, AP = x, PM = y, das Gewicht des x y

V v Bogens $AM = V$, ſeine Länge $= v$; ſo wird, wenn
Taf. V. x um $Pp = \partial x$ wächſt, der Bogen AM um
Fig. 38. $Mm = \partial v$, und ſein Gewicht um ∂V zunehmen. Die
Tangenten, welche zu den Punkten M und m gehören,
ſollen durch die Linien Tt und $T't'$ vorgeſtellt werden; fer-
φ ner ſetze man den Winkel $MTC = \varphi$, ziehe RR' in M
auf $T't'$ ſenkrecht, und Mq vertikal. Iſt nun die Span-
T nung in $M = T$, ſo iſt ſolche in $m = T + \partial T$, und
der Winkel φ für den Punkt m wird $\varphi + \partial\varphi = mT'C$, alſo $TMT' = tMt' = \partial\varphi$. Statt der Kette MAD kann man in M die Kraft T nach der Richtung Mt, und ſtatt der Kette mB in m oder M die Kraft $T + \partial T$ nach der Richtung MT' anbringen. Werden nun die Kettenſtücke MAD und mB weggenommen, und ſtatt derſelben die Kräfte T und $T + \partial T$ angebracht, ſo bleibt von der ganzen Kette nur noch das Element Mm übrig, deſſen Gewicht ∂V man ſich im Punkte M vereinigt vorſtellen kann. Sofern nun die Kette vorher im Gleichgewichte war, ſo müſſen auch noch die drei Kräfte T, $T + \partial T$ und ∂V nach den Richtungen Mt, Mt' und Mq am Punkte M im Gleichgewichte ſeyn.

Zerlegt man zuerſt dieſe drei Kräfte nach entgegengeſetzten Richtungen Mt' und MT', und bemerkt, daß der Winkel $tMt' = \partial\varphi$, alſo $\cos tMt' = \cos\partial\varphi = 1$, und daß der Winkel $qMt' = 90^\circ - \varphi - \partial\varphi$, alſo $\cos qMt' = \cos(90^\circ - \varphi - \partial\varphi) = \sin(\varphi + \partial\varphi)$ $= \sin\varphi\cos\partial\varphi + \cos\varphi\sin\partial\varphi = \sin\varphi + \partial\varphi\cos\varphi = \sin\varphi$ iſt, weil $\partial\varphi\cos\varphi$ gegen $\sin\varphi$ verſchwindet, ſo erhält man aus den beiden Kräften T und ∂V die Mittelkraft nach der Richtung Mt' (§. 19. IV. des erſten Bandes) $=$

$T \cos t'Mt + \partial V . \cos qMt' = T + \partial V . \sin \varphi$.
Nach entgegengeſetzter Richtung MT' wirkt $T + \partial T$, es muß daher
$T + \partial T = T + \partial V . \sin \varphi$ ſeyn, oder

$$\text{(I)} \quad \partial T = \partial V . \sin \varphi.$$

Werden eben dieſe drei Kräfte T, $T + \partial T$ und ∂V nach den entgegengeſetzten Richtungen MR und MR' ſenkrecht auf $T't'$ zerlegt, ſo erhält man
$T \sin \partial \varphi = \partial V \cos \varphi$, oder weil $\sin \partial \varphi = \partial \varphi$ iſt,

$$\text{(II)} \quad T \partial \varphi = \partial V . \cos \varphi,$$

Man multiplizire (I) mit $\cos \varphi$, und (II) mit $\sin \varphi$, ziehe die letzte Gleichung von der erſtern ab, ſo wird

$$\partial T . \cos \varphi - T \partial \varphi . \sin \varphi = o,$$

davon iſt das Integral

$$T \cos \varphi + \text{Const.} = o.$$

Für $\varphi = o$ werde $T = C$, ſo iſt C die Spannung c
im Scheitel A, und man erhält

$$C + \text{Const.} = o, \text{ daher}$$

$$\text{(III)} \quad T \cos \varphi = C.$$

Hienach iſt $T = \frac{C}{\cos \varphi}$, und wenn dieſer Werth in (II) ſtatt T geſetzt wird, ſo iſt

$$\frac{C \partial \varphi}{\cos \varphi^2} = \partial V,$$

hievon findet man das Integral

$$\text{(IV)} \quad V = C \operatorname{tgt} \varphi,$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil mit $\varphi = o$ auch $V = o$ werden muß.

Ferner iſt aus (III) $T = \frac{C}{\cos \varphi} = C \sqrt{(1 + \operatorname{tgt} \varphi^2)}$.
Aber $\operatorname{tgt} \varphi = \frac{V}{C}$ nach IV., daher erhält man, wenn

man dieſen Werth mit tgt φ vertauſcht,

$$(V)\ T = \sqrt{(C^2 + V^2)}.$$

Wird der Werth für C aus (III) in (IV) geſetzt, ſo erhält man $V = T \cos\varphi \operatorname{tgt}\varphi$, oder

$$(VI)\ V = T \sin\varphi.$$

§. 89.

Im Dreiecke M m n verhält ſich

$$1 : \operatorname{tgt}\varphi = mn : nM = \partial y : \partial x,$$

daher iſt

$$\operatorname{tgt}\varphi = \frac{\partial x}{\partial y},$$

folglich (§. 88. IV.) wenn $\frac{V}{C}$ ſtatt tgt φ geſetzt wird,

$$(I)\ C\partial x = V\partial y.$$

Ferner iſt hienach $C^2\partial x^2 = V^2\partial y^2$, und wenn auf beiden Seiten $V^2\partial x^2$ addirt wird,

$$(C^2 + V^2)\partial x^2 = V^2(\partial x^2 + \partial y^2) = V^2\partial v^2$$

weil $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial v^2$ iſt; oder

$$(II)\ \partial x = \frac{\pm V\partial v}{\sqrt{(C^2 + V^2)}}.$$

Nach (I) iſt $\partial x = \frac{V\partial y}{C}$; dieſen Werth in (II) geſetzt, giebt:

$$(III)\ \partial y = \frac{\pm C\partial v}{\sqrt{(C^2 + V^2)}},$$

welches die Fundamentalgleichungen für die Kettenlinie ſind, zu deren Auflöſung aber erfordert wird, daß vorher das Geſetz bekannt ſei, nach welchem das Gewicht V auf dem Bogen v vertheilt iſt. Auch wird bei dieſen Gleichungen vorausgeſetzt, daß die Stetigkeit der Kurve durch einzelne noch beſonders angebrachte Gewichte nicht unterbrochen werde, weil in dieſem Falle die Beſtimmung der beſtändigen Größen abgeändert werden muß.

Wächſt das Gewicht der Kette von A bis D nach eben dem Verhältniſſe wie von A nach B, ſo gelten für den Bogen AD eben die Schlüſſe, wie für den Bogen AB, und man erhält dieſelben Folgen. Es muß daher in dieſem Falle, wenn die Punkte B und D in einerlei Horizonte liegen, der Bogen AD dem Bogen AB gleich und ähnlich ſeyn.

Weil die ganze Kette BAD im Gleichgewichte iſt, ſo muß ſolches auch noch beſtehen, wenn irgend ein Punkt M' befeſtigt, und das Kettenſtück $M'D$ weggenommen wird. In dieſem Falle, wenn M' mit M in einerlei Horizonte liegt, iſt der Bogen AM' dem Bogen AM gleich und ähnlich.

§. 90.

Statt des Kettenſtücks MB, Figur 38., ſei in M, nach der Richtung der Tangente MT, die Kraft T, welche der Spannung daſelbſt gleich iſt, angebracht, ſo wird hiedurch das Gleichgewicht der Kette nicht unterbrochen, weil die Kraft T auf den Punkt M eben ſo, wie das Gewicht der Kette MAD wirkt. Statt der Kraft T laſſen ſich aber zwei andere ihr gleich wirkende Kräfte angeben, wovon die eine C' nach horizontaler Richtung MC', und die andere V' nach vertikaler Richtung MV' wirkt. Aus der Zerlegung der Kraft T nach dieſen beiden Richtungen erhält man (§. 20. I. Band) Taf. V. Fig. 38.

$$C' = T \cos \varphi \text{ und } V' = T \sin \varphi.$$

Nach §. 88. III. iſt aber $T \cos \varphi = C$, daher

$$(I)\ C' = C,$$

d. h. die Gewalt, mit welcher die Kette nach wagerechter Richtung auszuweichen ſtrebt, iſt in

allen Theilen derſelben gleich groß, und der Spannung am Scheitel gleich.

Weil ferner nach §. 88. VI. das Gewicht $V = T \sin \varphi$ iſt, ſo erhält man

$$(II)\ V' = V;$$

es iſt daher die Gewalt, mit welcher die Kette in irgend einem Punkte nach vertikaler Richtung zu zerreißen ſtrebt, eben ſo groß, als das Gewicht der Kette von dieſem Punkte bis zum Scheitel gerechnet.

§. 91.

Denkt man ſich eine Menge äußerſt kurzer Kettenglieder oder kleine Gewölbſteine ſo auf einander geſetzt, daß
Taf. V. Fig. 39. ſolche den Bogen BAD, Figur 39, bilden, und ſich einander im Gleichgewichte halten, vorausgeſetzt, daß die Punkte B und D nicht weichen können, ſo läßt ſich die Natur der krummen Linie BAD eben ſo wie §. 88. beſtimmen. Man ziehe vom Scheitel A die Linie AC ſenkrecht auf die Horizontale BD, nehme $AP = x$, $PM = y$; ferner ſei MT die zum Punkte M gehörige Tangente, und die Fuge M werde nach MT mit der Kraft T gepreßt, ſo muß für das Gleichgewicht der vom Bogen BM entſtehende Druck nach Mt ebenfalls $= T$ ſeyn. Wächſt nun $AM = v$ um $Mm = \partial v$, und das Gewicht des Bogens AM iſt $= V$, ſo iſt das Gewicht von $Mm = \partial V$, und T in m wird $= T + \partial T$. Werden nun die Kräfte T, $T + \partial T$ und ∂V nach den Richtungen $T't'$ und RR' ſenkrecht auf $T't'$ zerlegt, ſo findet man ebenfalls, wie §. 88., wenn der Winkel $CTM = \varphi$ geſetzt wird,

$$\partial T = \partial V . \sin \varphi, \text{ und}$$

$$T \partial \varphi = \partial V . \cos \varphi,$$

ſo daß auf eine ähnliche Art alle übrige Gleichungen entwickelt werden können. Es müſſen daher auch alle diejenigen Sätze, welche von einer frei hängenden Kette erwieſen ſind, von einem nach der Kettenlinie aufgerichteten Bogen mit unendlich kleinen Gewölbſteinen gelten.

Die gemeine Kettenlinie.

§. 92.

Wird angenommen, daß gleiche Theile des Bogens AM, Figur 38., gleiches Gewicht haben, und daß die Taf. V. Fig. 38. Länge eines jeden Fußes von dieſem Bogen g Pfund g wiege, ſo iſt V = gv. Ferner kann man ſich die Spannung am Scheitel oder C durch das Gewicht einer Kette ausgedrückt denken, von welcher ebenfalls jeder Fuß g Pfund wiegt. Iſt nun c die Länge einer ſolchen Kette, c deren Gewicht C Pfund beträgt, ſo wird C = cg, daher §. 89. (II)

$$\partial x = \frac{g v \partial v}{\sqrt{(c^2 g^2 + g^2 v^2)}}, \text{ oder}$$

$$x = \int \frac{v \partial v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}} = (c^2 + v^2) + \text{Const.}$$

Für x = o wird v = o, alſo

$$o = c + \text{Const., daher}$$

$$x = \sqrt{(c^2 + v^2)} - c, \text{ und hieraus}$$

$$\text{(I.) } v = \pm \sqrt{(2cx + x^2)},$$

die Länge v der Kettenlinie kann daher ſehr leicht für jede gegebene Abſciſſe x gefunden werden, wenn c bekannt iſt.

Nach §. 89. I. iſt

$V\partial y = C\partial x$, alſo $gv\partial y = gc\partial x$ oder $v\partial y = c\partial x$, und wenn in (I) ſtatt v der gefundene Werth $\frac{c\partial x}{\partial y}$ geſetzt wird

$$\pm \partial y \sqrt{(2cx + x^2)} = c\partial x, \text{ daher}$$

$$y = \pm \int \frac{c\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}}.$$

Dies zu integriren, ſetze man

$$x + \sqrt{(2cx + x^2)} = z, \text{ ſo iſt}$$

$$\frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{\sqrt{(2cx + x^2)}} \partial x = \partial z, \text{ oder}$$

$$\partial x = \frac{\partial z \sqrt{(2cx + x^2)}}{c + z}, \text{ daher}$$

$$y = \int \frac{c\,\partial z}{c + z} = c \operatorname{logn} (c + z) + \text{Const.}, \text{ oder}$$

$$y = c \operatorname{logn} [c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}] + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$, alſo

Const. $= - c \operatorname{logn} c$, daher

$$\text{(II.)}\quad y = \pm c \operatorname{logn} \frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c}.$$

Es können daher aus den gegebenen Abſciſſen x die dazu gehörigen Ordinaten nur mittelſt der natürlichen Logarithmen gefunden werden, wenn der Werth von C bekannt iſt.

Soll aus y und c der Werth von x gefunden werden, ſo ſei e die Grundzahl oder Baſis der natürlichen Logarithmen. Nun iſt für $y = \operatorname{logn} z$ auch $e^y = z$, oder weil

$$\frac{y}{c} = \operatorname{logn} \frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c},$$

ſo iſt auch

$$e^{\frac{y}{c}} = \frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c}, \text{ folglich wenn man}$$

hieraus x entwickelt,

(III.)

$$(III)\; x = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{y}{c}} + e^{\frac{-y}{c}} - 2 \right),$$

Wenn c nicht bekannt iſt, und man will aus der Abſciſſe x und der Länge v des zugehörigen Bogens die Ordinate y finden, ſo erhält man aus (I)

$$c = \frac{v^2 - x^2}{2x},$$

wird dieſer Werth in (II) ſtatt c geſetzt, ſo erhält man nach gehöriger Abkürzung

$$(IV)\; y = \pm \frac{v^2 - x^2}{2x} \operatorname{logn} \frac{v + x}{v - x}.$$

Will man endlich eine Gleichung zwiſchen der Ordinate y und dem dazu gehörigen Bogen v ſuchen, ſo erhält man nach §. 89. III., wenn $V = vg$ und $C = cg$ geſetzt wird,

$$\partial y = \frac{\pm c \partial v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}}.$$

Dies zu integriren, ſei $\sqrt{(c^2 + v^2)} = z - v$, ſo iſt $\partial v = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{c^2}{z^2}\right) \partial z$; $z - v = \tfrac{1}{2} z \left(1 + \frac{c^2}{z^2}\right)$, daher

$$y = \int \frac{c \partial v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}} = \int \frac{c \partial z}{z} = c \operatorname{logn} z + \text{Const.},$$

oder

$$y = c \operatorname{logn} [v + \sqrt{(c^2 + v^2)}] + \text{Const.}$$

Für $y = 0$ wird $v = 0$, alſo Const. $= - c \operatorname{logn} c$, daher

$$(V.)\; y = c \operatorname{logn} \frac{v + \sqrt{(c^2 + v^2)}}{c}.$$

Die vorſtehenden fünf verſchiedenen Gleichungen für die Kettenlinie ſetzen voraus, daß durchgängig gleiche Längen der Kette gleiches Gewicht haben. Weil aber das Gewicht der Kette, in Bezug auf ihre Länge, noch nach unzähligen andern Vorausſetzungen proportionirt ſeyn

kann, ſo müſſen auch für jeden beſondern Fall andere Gleichungen entſtehen. Es wird daher, um Verwechſelungen zu vermeiden, diejenige von dieſen krummen Linien, bei welcher gleiche Längen gleiches Gewicht haben, eine gemeine Kettenlinie genannt werden.

Eben dieſe Gleichungen für die Kettenlinie hätte man aus den §. 308. im zweiten Bande gefundenen drei Ausdrücken ableiten können.

§. 93.

Zuſatz. Wird vorausgeſetzt, daß x gegen y ſo klein werde, daß man y und v als gleich groß anſehn kann, ſo erhält man, weil $v\partial y = c\partial x$ (§. 92.) iſt, wenn y ſtatt v geſetzt wird,

$$\int y\partial y = \int c\partial x,\ \text{alſo}\ \tfrac{1}{2}y^2 = cx,\ \text{oder}$$
$$y = \sqrt{2cx},$$

daher wird unter dieſer Vorausſetzung die Kettenlinie eine Parabel, deren Parameter 2 c iſt.

Galilei glaubte, daß eine vollkommen biegſame Schnur, wenn ſie an ihren beiden Enden aufgehangen wird, eine Parabel bildete (*); dagegen haben Leibnitz, Johann Bernoulli und Hugen zuerſt erwieſen, daß dieſe Linie von einer andern Natur ſei.

§. 94.

Soll mit Hülfe der gefundenen Gleichungen eine Kettenlinie gezeichnet werden, ſo kann ſolches dadurch geſche-

(*) Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze, attenenti alla mecanica et i movimenti locali, del Sig. Galileo *Galilei*, in Leida 1638. p. 146.

hen, daß man c willkürlich annimmt, und für die verſchiedenen Werthe von x die dazu gehörigen Werthe von y nach §. 92. II. berechnet. Allein in dieſem Falle, wenn c willkürlich angenommen wird, erhält man für einerlei x einen deſto größern Werth für y, je größer c iſt. Soll nun mit einem gegebenen Werthe von x ein gewiſſer Werth von y übereinſtimmen, z. B. wenn die größte Ordinate BC = a und die dazu gehörige Abſciſſe AC = h gegeben ſind, und man verlangt für eine ſolche Kettenlinie die Gleichung, durch welche y aus x beſtimmt werden kann, ſo läßt ſich einſehn, daß zuvor c bekannt ſeyn muß. Weil dies aber mit Hülfe der gefundenen Gleichungen nicht zu bewerkſtelligen iſt, der vorgelegte Fall aber grade zu denjenigen gehört, welche in der Ausübung am meiſten vorkommen, ſo muß man ſich anderer Mittel bedienen, um aus der gegebenen größten Abſciſſe und Ordinate einer Kettenlinie die Kurve zu conſtruiren. (*)

Am leichteſten ſcheint ſich dies bewerkſtelligen zu laſſen, wenn für gegebene Werthe von y die zugehörigen Werthe von x nach §. 92. (III.) dergeſtalt berechnet und in eine Tafel geordnet werden, daß ſich y und x durch c beſtimmen laſſen, z. B. wenn y = 0,1 . c geſetzt wird,

---

(*) Man hat zur Beſtimmung des Werths von c die Regel gegeben, eine Kette oder ſehr biegſame Schnur ſo aufzuhängen, bis ſolche den Werthen a und h entſpricht. Wird alsdann die Länge der Schnur ausgemeſſen, ſo könnte man nach §. 92. (I) den Werth für c finden, wenn nur hiedurch v hinlänglich genau bekannt wäre.

ſo findet man aus III., $x = 0,005004\ c$, und hieraus $\frac{x}{y} = 0,05004$.

Wäre nun in einem beſondern Falle die Ordinate y nebſt der zugehörigen Abſciſſe x gegeben, und man fände, daß $\frac{x}{y} = 0,05$ iſt, ſo kann man $y = 0,1 \,.\, c$ ſetzen. Dies giebt, weil y bekannt iſt,

$$c = \frac{y}{0,1} = 10 \,.\, y.$$

Nachſtehende Tafel enthält für mehrere Werthe von $\frac{x}{y}$ die zugehörigen Werthe von y und x, bei welchen der Werth von c unbeſtimmt geblieben iſt.

Wenn daher in irgend einem Falle x und y gegeben ſind, ſo ſuche man in der Tafel den nächſten Werth für $\frac{x}{y}$. Iſt alsdann der nebenſtehende Werth für $y = m \,.\, c$, ſo erhält man

$$c = \frac{y}{m},$$

ſo daß ſich nun, weil c bekannt iſt, nach §. 92. II. eine Gleichung für die Kettenlinie angeben läßt, welche den Bedingungen entſpricht.

$\frac{x}{y}$	y	x
0,005	0,010 . c	0,00005 . c
0,010	0,020 . c	0,00020 . c
0,015	0,030 . c	0,00045 . c
0,020	0,040 . c	0,00081 . c
0,025	0,050 . c	0,00125 . c
0,030	0,060 . c	0,00181 . c
0,035	0,070 . c	0,00245 . c
0,040	0,080 . c	0,00320 . c
0,045	0,090 . c	0,00406 . c
0,050	0,100 . c	0,00500 . c
0,060	0,120 . c	0,00721 . c
0,070	0,140 . c	0,00982 . c
0,080	0,160 . c	0,01283 . c
0,090	0,180 . c	0,01624 . c
0,100	0,200 . c	0,02007 . c
0,126	0,250 . c	0,03141 . c
0,151	0,300 . c	0,04534 . c
0,177	0,350 . c	0,06188 . c
0,203	0,400 . c	0,08107 . c
0,229	0,450 . c	0,10297 . c
0,255	0,500 . c	0,12763 . c
0,282	0,550 . c	0,15510 . c
0,309	0,600 . c	0,18546 . c
0,337	0,650 . c	0,21879 . c
0,364	0,700 . c	0,25517 . c
0,393	0,750 . c	0,29468 . c
0,422	0,800 . c	0,33743 . c
0,451	0,850 . c	0,38353 . c
0,481	0,900 . c	0,43309 . c
0,512	0,950 . c	0,48622 . c

$\frac{x}{y}$	y	x
0, 543	1, 000 . c	0, 54308 . c
0, 575	1, 050 . c	0, 60379 . c
0, 606	1, 100 . c	0, 66646 . c
0, 640	1, 150 . c	0, 73742 . c
0, 676	1, 200 . c	0, 81071 . c
0, 711	1, 250 . c	0, 88842 . c
0, 747	1, 300 . c	0, 97091 . c
0, 784	1, 350 . c	1, 05833 . c
0, 822	1, 400 . c	1, 15090 . c
0, 861	1, 450 . c	1, 24884 . c
0, 902	1, 500 . c	1, 35241 . c
0, 943	1, 550 . c	1, 46186 . c
0, 986	1, 600 . c	1, 57747 . c
0, 995	1, 610 . c	1, 60135 . c
1, 000	1, 616 . c	1, 61580 . c
1, 003	1, 620 . c	1, 62549 . c
1, 030	1, 650 . c	1, 69952 . c
1, 075	1, 700 . c	1, 82832 . c
1, 122	1, 750 . c	1, 96419 . c
1, 171	1, 800 . c	2, 10747 . c
1, 191	1, 820 . c	2, 16694 . c
1, 221	1, 850 . c	2, 25853 . c
1, 252	1, 880 . c	2, 35305 . c
1, 272	1, 900 . c	2, 41773 . c
1, 294	1, 920 . c	2, 48378 . c
1, 326	1, 950 . c	2, 58548 . c
1, 359	1, 980 . c	2, 69040 . c
1, 381	2, 000 . c	2, 76220 . c
1, 404	2, 020 . c	2, 83549 . c
1, 438	2, 050 . c	2, 94832 . c

$\frac{x}{y}$	y	x
1,473	2,080 . c	3,06470 . c
1,497	2,100 . c	3,14431 . c
1,522	2,120 . c	3,22559 . c
1,558	2,150 . c	3,35067 . c
1,596	2,180 . c	3,47967 . c
1,623	2,200 . c	3,56791 . c
1,648	2,220 . c	3,65797 . c
1,687	2,250 . c	3,79657 . c
1,728	2,280 . c	3,93948 . c
1,755	2,300 . c	4,03722 . c
1,783	2,320 . c	4,13697 . c
1,822	2,350 . c	4,29047 . c
1,879	2,380 . c	4,44872 . c
1,899	2,400 . c	4,55695 . c
1,929	2,420 . c	4,66739 . c
1,974	2,450 . c	4,83734 . c
2,021	2,480 . c	5,01250 . c
2,053	2,500 . c	5,13229 . c
2,085	2,520 . c	5,25453 . c
2,134	2,550 . c	5,44259 . c
2,185	2,580 . c	5,63646 . c
2,219	2,600 . c	5,76901 . c
2,254	2,620 . c	5,90426 . c
2,307	2,650 . c	6,11235 . c
2,361	2,680 . c	6,32683 . c
2,398	2,700 . c	6,47347 . c
2,435	2,720 . c	6,62310 . c
2,492	2,750 . c	6,85328 . c
2,551	2,780 . c	7,09053 . c
2,590	2,800 . c	7,25272 . c

$\frac{x}{y}$	y	x
2,630	2,820 . c	7,41823 . c
2,692	2,850 . c	7,67281 . c
2,755	2,880 . c	7,93520 . c
2,798	2,900 . c	8,11458 . c
2,842	2,920 . c	8,29761 . c
2,886	2,940 . c	8,48436 . c
2,931	2,960 . c	8,67489 . c
2,970	2,980 . c	8,86931 . c
2,999	2,990 . c	8,96798 . c
3,026	3,000 . c	9,06766 . c

Hiebei iſt noch zu bemerken, daß wenn man $x = 1,61615 . c$ ſetzt, alsdann $y = 1,61616 . c$ gefunden wird.

Wollte man z. B. eine Kettenlinie zeichnen, bei welcher die größte Abſciſſe oder $h = 37$, und die größte Ordinate oder $a = 45$ gegeben ſind, ſo findet man

$$\frac{h}{a} = \frac{37}{45} = 0,8222 \ldots$$

Hiemit ſtimmt in der Tafel unter $\frac{x}{y}$ die Zahl 0,822 am genaueſten überein, man erhält daher, weil y oder $a = 1,4 . c$ iſt,

$$c = \frac{a}{1,4} = \frac{45}{1,4} = 32,14285.$$

Da ſich nun in der vorſtehenden Tafel alle Werthe von x und y für einerlei c auf einerlei Kettenlinie beziehen, ſo darf man nur die in der Tafel zuſammengehörigen Koeffizienten von x und y mit $c = 32,14285$ multipliziren, um zu der geſuchten Kettenlinie nachſtehende Werthe für y und x zu erhalten.

y	x	y	x
3, 21	0, 16	25, 71	10, 85
6, 43	0, 64	28, 93	13, 12
9, 64	1, 45	32, 14	17, 46
12, 86	2, 60	35, 36	21, 42
16, 07	4, 10	38, 57	26, 06
19, 29	5, 96	41, 78	31, 21
22, 50	8, 20	45, 00	37, 00

Es laſſen ſich nun leicht in denjenigen Fällen, wo die gegebenen Werthe von $\frac{h}{a}$ in der Tafel genau genug aufgefunden werden, die zugehörigen Kurven hinlänglich genau angeben. Wenn aber der Werth von $\frac{h}{a}$ nicht genau genug vorhanden iſt, ſo kann das Aufzeichnen der geſuchten Kurve hiedurch nicht bewirkt werden. Auch ſieht man leicht, daß eine dergleichen Tafel von großem Umfange ſeyn müßte, wenn man verlangt, daß die aufeinander folgenden Werthe von x und y keine große Differenzen geben ſollen.

§. 95.

Um daher ohne Beihülfe einer Tafel diejenige Gleichung für die Kettenlinie zu beſtimmen, welche einer gegebenen Abſciſſe und Ordinate entſpricht, muß man noch einen andern Weg aufſuchen, um dieſen Endzweck zu erreichen. Durch nachſtehendes Verfahren erhält man einen Näherungsausdruck, welcher für die gewöhnlich in der Ausübung vorkommenden Fälle zureicht, und unter den

aufgeſtellten Bedingungen mit hinlänglicher Genauigkeit angewandt werden kann.

Nach §. 92. (IV.) iſt

$$\frac{2xy}{v^2 - x^2} = \text{logn}\,\frac{v + x}{v - x} = \text{logn}\,\frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}}.$$

Es iſt aber (P. A. 1. B. S. 424. V.)

$$\text{logn}\,\frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}} = 2\left[\frac{x}{v} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{v}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{v}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder

$$y = (v^2 - x^2)\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{v^3} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{v^5} + \frac{1}{7}\frac{x^6}{v^7} + \ldots\right]$$

$$y = v - \frac{2}{1 \cdot 3}\frac{x^2}{v} - \frac{2}{3 \cdot 5}\frac{x^4}{v^3} - \frac{2}{5 \cdot 7}\frac{x^6}{v^5} - \frac{2}{7 \cdot 9}\frac{x^8}{v^7} - \ldots$$

oder wenn man auf beiden Seiten durch v dividirt und $\frac{x}{v} = z$ ſetzt,

$$\frac{y}{v} = 1 - \frac{2}{1 \cdot 3}z^2 - \frac{2}{3 \cdot 5}z^4 - \frac{2}{5 \cdot 7}z^6 - \frac{2}{7 \cdot 9}z^8 - \ldots \text{ alſo}$$

$$\frac{y^2}{v^2} = 1 - \tfrac{4}{3}z^2 + \tfrac{8}{45}z^4 + \tfrac{4}{63}z^6 + \tfrac{16}{525}z^8 + \tfrac{892}{51975}z^{10} + \ldots$$

oder

$$\frac{v^2 - y^2}{v^2} = \tfrac{4}{3}z^2 - \tfrac{8}{45}z^4 - \tfrac{4}{63}z^6 - \tfrac{16}{525}z^8 - \ldots$$

oder wenn durch z^2 dividirt und x^2 ſtatt $v^2 z^2$ geſetzt wird,

$$\frac{v^2 - y^2}{x^2} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{8}{45}z^2 - \tfrac{4}{63}z^4 - \tfrac{16}{525}z^6 - \ldots$$

Verwandelt man dieſe Reihe in einen Kettenbruch, und ſucht mit Hülfe deſſelben einen Näherungswerth, ſo erhält man

$$\frac{4(210 - 103z^2)}{45(14 - 5z^2)} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{8}{45}z^2 - \tfrac{4}{63}z^4 - \tfrac{10}{441}z^6 - \ldots$$

alſo nahe genug

$$\frac{v^2 - y^2}{x^2} = \frac{4(210 - 103z^2)}{45(14 - 5z^2)},$$

oder für v^2 und z^2 die Werthe $2cx + x^2$ und $\frac{x^2}{v^2} = \frac{x}{2c + x}$ geſetzt, giebt

$$\frac{2cx + x^2 - y^2}{x^2} = \frac{1680cx + 428x^2}{1260cx + 405x^2}.$$

Hieraus erhält man

$$y^2 = \frac{x(2520c^2 + 390cx - 23x^2)}{45(28c + 9x)}.$$

Weil dieſer Näherungsausdruck den Werth für y etwas zu klein angiebt, derſelbe aber für die bei Gewölben gewöhnlich vorkommenden Fälle nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 9c$ gebraucht wird, ſo läßt ſich dieſer Ausdruck dadurch noch verbeſſern, daß man die allgemeine Form deſſelben beibehält, die Koeffizienten aber nach den erforderlichen Bedingungen noch näher beſtimmt. Man ſetze daher

$$y^2 = \frac{\alpha c^2 x + \beta c x^2 - \gamma x^3}{\delta c + x},$$

und beſtimme nach der Tafel §. 94. für verſchiedene bekannte Werthe von x und y die Koeffizienten α, β, γ, δ. Da nun die Gleichung nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 9c$ angewandt werden ſoll, und ſchon für $x = 0$ die erforderliche Eigenſchaft hat, daß $y = 0$ wird, ſo kann man ſich zur Beſtimmung der Koeffizienten α, β, γ, δ der Werthe $y = 0{,}7 \cdot c$; $y = 1{,}5 \cdot c$; $y = 2{,}3 \cdot c$ und $y = 3c$ bedienen. Dieſe geben nach der angeführten Tafel

$x = 0{,}25517\,c$ für $y = 0{,}7\,c$

$x = 1{,}35241\,c$ für $y = 1{,}5\,c$

$x = 4{,}03722\, c$ für $y = 2{,}3c$ und

$x = 9{,}06766\, c$ für $y = 3c$.

Durch die Subſtitution dieſer Werthe in die angenommene Gleichung erhält man vier verſchiedene Ausdrücke für die unbekannten Koeffizienten, und nach gehöriger Entwickelung iſt

$$\alpha = 7{,}98877$$
$$\beta = 0{,}69129$$
$$\gamma = 0{,}015725$$
$$\delta = 3{,}99390,$$ und daher

$$y^2 = \frac{79888\, c^2 x + 6913\, c x^2 - 157\, x^3}{39939\, c + 10000\, x},$$ folglich

$$y = \sqrt{\frac{79888\, c^2 x + 6913\, c x^2 - 157\, x^3}{39939\, c + 10000\, x}}.$$

Um die Genauigkeit dieſes Ausdrucks zu beurtheilen, kann man die §. 92. für x und y gefundenen Werthe mit denjenigen vergleichen, welche durch die Auflöſung dieſes Ausdrucks erhalten werden. Nachſtehende Tafel enthält eine Vergleichung derſelben.

Gegeben x	nach §. 92. y	nach obigem Ausdruck y
0, 00500 . c	0, 1 . c	0, 1000 . c
0, 54308 . c	1 . c	1, 0003 . c
2, 76220 . c	2 . c	1, 9995 . c
9, 06766 . c	3 . c	3, 0002 . c

Eben ſo kann man auch die Genauigkeit des gefundenen Näherungsausdrucks und ſeine ſchöne Uebereinſtim-

mung mit den allgemeinen Gleichungen §. 92. noch beſſer überſehen, wenn man durchgångig x = 10 ſetzt, und für verſchiedene Werthe von c nach §. 92. (II) die zugehörigen Werthe von y ſucht. Die folgende Tafel enthålt in der erſten Spalte die Werthe von c, in der zweiten die Werthe von y nach §. 92. (II) berechnet, und in der dritten diejenigen Werthe für y, welche man mittelſt des vorſtehenden Nåherungsausdrucks findet

Für x = 10

c	nach §. 92. y	Nåherungswerth y
1	3, 088	3, 084
2	4, 956	4, 958
3	6, 437	6, 436
4	7, 699	7, 697
5	8, 814	8, 812
10	13, 169	13, 171
20	19, 248	19, 255
30	23, 861	23, 869
40	27, 726	27, 733
50	31, 119	31, 126

§. 96.

Für gegebene Werthe von x und y låßt ſich nun leicht der Werth von c, und dadurch die Gleichung zwiſchen x

und y für beſondere Fälle finden. Denn nach dem vorigen §. erhält man

$$39939cy^2 + 10000xy^2 = 79888c^2x + 6913cx^2 - 157x^3,$$

und wenn hieraus c entwickelt wird:

$$c = \frac{39939y^2 - 6913x^2}{159776x} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{39939y^2 - 6913x^2}{159776x}\right)^2 + \frac{157x^2 + 10000y^2}{79888}\right]}$$

wo nur das obere Zeichen vor der Wurzel gelten kann, weil c nicht negativ werden darf Wird dieſer Ausdruck durch die Verrichtung der Diviſionen noch mehr abgekürzt, ſo erhält man nahe genug

$$c = \frac{25y^2 - 4{,}33x^2 + \sqrt{(38x^4 + 1036x^2y^2 + 625y^4)}}{100x}.$$

Für $x = h$ und $y = 3h$ wird

$$c = 4{,}656\,h.$$

Für $x = h$ und $y = 2h$ erhält man

$$c = 2{,}088\,h.$$

Wenn $x = y = h$ iſt, ſo wird

$$c = 0{,}619\,h;$$

und endlich für $x = h$ und $y = \frac{1}{2}h$ iſt

$$c = 0{,}202\,h.$$

Um auch hier die ſchöne Uebereinſtimmung mit den allgemeinen Ausdrücken §. 92. zu überſehen, ſetze man $x = h$ und $c = 4{,}656\,h$, ſo erhält man nach §. 92. II.

$$y = 4{,}656\,h \log n \frac{5{,}656 + \sqrt{10{,}312}}{4{,}656} = 2{,}9997\,h,$$

ſtatt daß $y = 3h$ ſeyn ſoll, wo alſo der Fehler nur $\frac{3}{10000}h$ beträgt.

§. 97.

Weil φ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente mit dem Horizonte einſchließt, und §. 88. (IV)

C tgt φ = V iſt, ſo erhält man

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{V}{C} = \frac{g\,v}{g\,c}, \text{ oder §. 92. (I)}$$

$$\text{(I) tgt}\,\varphi = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(2cx + x^2)}}{c}.$$

Wird v = ∞, ſo iſt tgt φ = ∞, alſo die Tangente vertikal. Es kann daher nur bei einer unendlich langen Kette die Tangente derſelben ſenkrecht auf dem Horizonte ſtehen.

Es iſt $\text{tgt}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{\text{tgt}\,\varphi}{1+\sqrt{(1+\text{tgt}\,\varphi^2)}} = \frac{v}{c+\sqrt{(c^2+v^2)}}$.

Nach §. 92. (I) iſt aber $c = \frac{v^2 - x^2}{2x}$, daher, wenn dieſer Werth ſtatt c in die gefundene Gleichung geſetzt wird,

$$\text{(II) tgt}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{x}{v}.$$

Weil $\text{tgt}\,\varphi^2 = \frac{\sin\varphi^2}{1-\sin\varphi^2} = \frac{1-\cos\varphi^2}{\cos\varphi^2} = \frac{2cx+x^2}{c^2}$, ſo erhält man hienach

$$\text{(III) } \sin\varphi = \frac{\sqrt{(2cx+x^2)}}{c+x} = \frac{v}{\sqrt{(c^2+v^2)}} \text{ und}$$

$$\text{(IV) } \cos\varphi = \frac{c}{c+x} = \frac{c}{\sqrt{(c^2+v^2)}}.$$

Es iſt ferner §. 89. (III)

$\partial y = \frac{c\,\partial v}{\sqrt{(c^2+v^2)}} = \cos\varphi\,\partial v$. Aber nach (I) iſt

$\partial v = c\,\partial\,\text{tgt}\,\varphi = \frac{c\,\partial\varphi}{\cos\varphi^2}$, alſo

$\partial y = \frac{c\,\partial\varphi}{\cos\varphi}$, folglich (P. A. S. 245.)

$$\text{(V) } y = \tfrac{1}{2}c\,.\,\text{logn}\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

§. 98.

Zuſatz. Der Winkel, welchen die Tangente der Kettenlinie in ihrem Aufhangepunkte mit der Horizontale bildet, ſei α, ſo iſt für x = h

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{\sqrt{(2ch + h^2)}}{c}.$$

Iſt nun a die größte Ordinate, welche zur größten Abſciſſe h gehört, ſo wird

für a = 3h (§. 96.) c = 4,656 h, alſo

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{\sqrt{10,312}}{4,656} = 0,6897 = \operatorname{tgt} 34^\circ\, 36'.$$

Eine aufgehängte in allen Theilen gleich ſchwere Kette, deren größte Ordinate dreimal ſo groß iſt als die zugehörige Abſciſſe, bildet daher in ihrem Aufhängepunkte mit dem Horizonte einen Winkel von 34 Grad 36 Minuten.

Für a = 2h iſt c = 2,088 h, daher

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{\sqrt{5,176}}{2,088} = 1,0896 = \operatorname{tgt} 47^\circ\, 27'.$$

Für a = h iſt c = 0,619 h, alſo

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{\sqrt{2,238}}{0,619} = 2,4168 = \operatorname{tgt} 67^\circ\, 31',$$

und für a = $\frac{1}{2}$h wird c = 0,202 h, folglich

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{\sqrt{1,404}}{0,202} = 5,866 = \operatorname{tgt} 80^\circ\, 20'.$$

§. 99.

Wenn r den Halbmeſſer der Krümmung bezeichnet, welcher der Abſciſſe x entſpricht, ſo iſt für jede krumme Linie $r = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y}$, wo ∂x als conſtant angenommen werden muß. Nun iſt §. 92.

$v\partial v = c\partial x$, daher wenn man differenziirt, weil $\partial^2 x = 0$ iſt,

$\partial v \partial y + v\partial^2 y = 0$ oder $\frac{-\partial v}{\partial^2 y} = \frac{v}{\partial y}$, alſo

$$\frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y} = \frac{v\, \partial v^2}{\partial x\, \partial y} = v\, \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x \partial y} = v\left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Aber

Aber $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{v}{c}$, alſo

$$\frac{-\partial v^3}{\partial x\, \partial^2 y} = v\left(\frac{v}{c} + \frac{c}{v}\right), \text{ oder}$$

$$(\text{I})\; r = \frac{c^2 + v^2}{c},$$

und weil §. 92. (I) $v^2 = 2cx + x^2$ iſt,

$$(\text{II})\; r = \frac{(c + x)^2}{c}.$$

Der Halbmeſſer der Krümmung iſt daher für $x = 0$ oder am Scheitel am kleinſten, und wächſt mit x.

Weil $\frac{v}{c} = \text{tgt}\,\varphi$, alſo $v^2 = c^2\,\text{tgt}\,\varphi^2$, oder $c^2 + v^2 = c^2 + c^2\,\text{tgt}\,\varphi^2 = c^2(1 + \text{tgt}\,\varphi^2) = c^2 \sec\varphi^2$, ſo erhält man auch, wenn dieſer Werth in I. geſetzt wird, (III) $r = c \sec\varphi^2$ oder auch $r \cos\varphi^2 = c$, und (IV) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{r - c}{r}}$.

Wäre ϱ der Krümmungshalbmeſſer am Scheitel, ſo iſt für dieſen Fall $x = 0$, alſo (II)

$$\varrho = c.$$

§. 100.

Zuſatz. Bezeichnen a, h die größten Ordinaten und Abſciſſen einer Kettenlinie, und ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmeſſer am Scheitel und am Aufhängepunkte derſelben, ſo iſt §. 99.

$$\varrho = c \text{ und } \varrho' = \frac{(c + h)^2}{c}.$$

Für $a = 3h$ iſt $c = 4{,}656\,h$, daher

$$\varrho = 4{,}656\,h \text{ und } \varrho' = \frac{5{,}656^2}{4{,}656}\,h.$$

Für verſchiedene Werthe von a entſtehet nachſtehende Tafel.

Größte Ordinate a	Krümmungshalbmeſſer am	
	Scheitel. ϱ	Aufhänge-punkte. ϱ'
3 h	4, 656 . h	6, 871 . h
2 h	2, 088 . h	4, 567 . h
h	0, 619 . h	4, 235 . h
$\frac{1}{2}$ h	0, 202 . h	7, 152 . h

§. 101.

Es ſei T die Spannung der in allen Theilen gleich ſchweren Kette in irgend einem Punkte, und t die Länge eines Stücks von der Kette, deſſen Gewicht der Spannung T gleich iſt, ſo erhält man

$T = gt$ (§. 92.) und weil $V = gv$ iſt, ſo wird §. 88. (V)

$$gt = \sqrt{(g^2c^2 + g^2v^2)}, \text{ oder}$$

$$\text{(I) } t = \sqrt{(c^2 + v^2)}.$$

Ferner iſt $v^2 = 2cx + x^2$ (§. 92.), daher

$$\text{(II) } t = c + x.$$

Die Spannung wächſt alſo mit der Abſciſſe x.

Weil §. 99. (II)

$$c + x = \sqrt{cr},$$

ſo erhält man

$$\text{(III) } t = \sqrt{cr},$$

oder die Spannung iſt der Quadratwurzel aus dem Krümmungshalbmeſſer proportional.

Nach §. 97. (I) iſt $c = \frac{v}{\operatorname{tgt} \varphi} = v \cot \varphi$, alſo nach (I)

$t = \sqrt{(v^2 \cot \varphi + v^2)} = v \sqrt{(1 + \cot \varphi)}$, oder weil $\sqrt{(1 + \cot \varphi)} = \frac{1}{\sin \varphi}$ iſt, ſo erhält man auch

$$(IV)\; t = \frac{v}{\sin \varphi} = v \,.\, \operatorname{cosec} \varphi.$$

§. 102.

Zuſatz. Man ſetze, daß τ und τ' diejenigen Kettenlängen bezeichnen, deren Gewichte den Spannungen am Scheitel und Aufhängepunkte gleichgeltend ſind, ſo findet man nach dem Vorhergehenden

$$\tau = c \text{ und } \tau' = c + h.$$

Für verſchiedene Ketten erhält man daher nach §. 96. folgende Spannungen:

Größte Ordinate a	Spannung am	
	Scheitel. τ	Aufhängepunkte. τ'
3 h	4, 656 . h	5, 656 . h
2 h	2, 088 . h	3, 088 . h
h	0, 619 . h	1, 619 . h
$\frac{1}{2}$ h	0, 202 . h	1, 202 . h

Will man die Spannung T in Pfunden ausdrücken, ſo darf nur das Gewicht eines Fußes von der Kettenlänge mit t multiplizirt werden. Dieſes Gewicht ſei g, ſo iſt

$$T = gt.$$

§. 103.

Taf. V. Fig. 39. Die Quadratur des Raumes AMP = F′, Figur 39., welcher bei der gemeinen Kettenlinie durch den Bogen AM, die Abſciſſe AP = x, und die Ordinate PM = y eingeſchloſſen wird, der hier die Kettenfläche heißen ſoll, iſt vom Integral $y \partial x$ abhängig. Nun iſt $F' = \int y \partial x = xy - \int x \partial y$. Aber §. 92. (II) $\int x \partial y = \int \frac{c x \partial x}{\surd (2cx + x^2)}$. Man ſetze daher $2cx + x^2 = z^2$, ſo iſt $\partial z = \frac{(c + x) \partial x}{z}$, alſo $z = \int \frac{c \partial x}{z} + \int \frac{x \partial x}{z}$, oder wenn für z ſein Werth $= \surd (2cx + x^2)$ geſetzt wird,

$$\int \frac{x \partial x}{\surd (2cx + x^2)} = \surd (2cx + x^2) - \int \frac{c \partial x}{\surd (2cx + x^2)}.$$

Das letzte Integral iſt nach §. 92. = y, daher $\int \frac{c x \partial x}{\surd (2cx + x^2)} = c \surd (2cx + x^2) - cy$, folglich $\int y \partial x = xy - c \surd (2cx + x^2) + cy$, wo keine Conſtante hinzukommt, weil F′ mit x und y zugleich verſchwindet, daher iſt die geſuchte Fläche

(I) $F' = (x + c) y - c \surd (2cx + x^2)$,

oder nach §. 92. (I)

(II) $F' = (x + c) y - cv$,

oder, wenn in (I) ſtatt y ſein Werth aus §. 92. (II) geſetzt wird,

(III) $F' = c(c+x) \log n \frac{c+x+\surd(2cx+x^2)}{c} - c\surd(2cx+x^2)$.

Für x = h und y = a werde F′ = F, ſo iſt nach (I)

(IV) $F = (h + c) a - c \surd (2ch + h^2)$.

§. 104.

Aufgabe. Der Raum $AA'B'B$, Figur 40., welcher auf einer Seite von der Kettenlinie AMB begrenzt wird, habe die Beſchaffenheit, daß alle auf den Elementen der Kettenlinie ſenkrechte Linien wie MM', AA', BB', einander gleich ſind, oder daß die krumme Linie $A'M'B'$ mit der Kettenlinie parallel (*) iſt; man ſucht den Flächeninhalt von $AA'B'B$. Taf. V. Fig. 40.

Aufloͤſung. Es ſei $BC = a$, $AA' = b$ und für $AP = x$, $AM = v$; der zum Elemente $Mm = \partial v$ gehörige Krümmungshalbmeſſer $MO = r$. Ferner $AA'B'B = f$; $AA'M'M = f'$, alſo $MM'm'm = \partial f'$, ſo verhält ſich

$r : r + b = \partial v : M'm'$, alſo $M'm' = \frac{r+b}{r} \partial v$. Nun iſt $\partial f' = \frac{Mm + M'm'}{2} b = \frac{(2r+b)b}{2r} \partial v$, oder weil §. 99.

$r = \frac{c^2+v^2}{c}$, ſo iſt $\partial f' = \frac{2(c^2+v^2)b + bc^2}{2(c^2+v^2)} \partial v$, alſo

$f' = \int b \partial v + \frac{bc^2}{2} \int \frac{\partial v}{c^2+v^2}$. Nun iſt (P. A. S. 134.)

$$\int \frac{\partial v}{c^2+v^2} = \frac{1}{c} \text{ Arc tgt } \frac{v}{c}, \text{ daher}$$

$$f' = bv + \frac{bc}{2} \text{ Arc tgt } \frac{v}{c},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil f' mit v zugleich verſchwindet.

(*) Dieſer Ausdruck muß in der hier beſchränkten Bedeutung genommen werden. Sonſt könnte man auch ſagen, die Linie $A'M'B'$ ſei von der Linie AMB gleich weit abſtehend.

Für jeden gegebenen Werth von x kann nun leicht $\bar{v}$ (§. 92.) beſtimmt werden, wodurch f für x = a bekannt iſt.

Dieſer Ausdruck findet ſeine Anwendung, wenn man den Querſchnitt oder die Stirnfläche eines gleichdicken Tonnengewölbes berechnen will, deſſen innere Wölbung eine Kettenlinie iſt.

§. 105.

1. Zuſatz. Um zu überſehen, daß die Kurve $A'M'B'$, welche von AMB in normalen Abſtänden gleich weit entfernt iſt, eine von der Kettenlinie verſchiedene Geſtalt hat, ſetze man $A'P' = x'$ und den Bogen $A'M' = v'$, ſo iſt nach dem vorigen §.

$$\partial v' = \frac{r+b}{r}\partial v = \frac{(c^2+v^2)+bc}{c^2+v^2}\partial v, \text{ alſo}$$

$$v' = \int\left[\partial v + \frac{bc\,\partial v}{c^2+v^2}\right] = v + b \operatorname{Arc\,tgt}\frac{v}{c}, \text{ oder}$$

$$v' = \sqrt{(2cx+x^2)} + b \operatorname{Arc\,tgt}\frac{\sqrt{(2cx+x^2)}}{c}. \text{ Aber}$$

$$x' = b + x - b\cos\varphi = b + x - \frac{bc}{c+x}, \text{ und hieraus}$$

$$x = \frac{x'-b-c}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(x'-b-c)^2}{4} + cx'\right]}.$$

Dieſen Werth in die Gleichung für v' ſtatt x geſetzt, giebt eine Gleichung zwiſchen v' und x', welche von der Gleichung für die gemeine Kettenlinie ſehr verſchieden iſt.

Auch kann man noch auf einem andern Wege überſehen, daß es nicht möglich iſt, zwei Kettenlinien AMB und $A'M'B'$ anzugeben, welche in normalen Abſtänden gleichweit von einander entfernt ſind. Denn man ſetze den Krümmungshalbmeſſer $M'O$ für das Element $M'm' = r'$, ſo iſt §. 99. (III)

$$r' = \frac{c'}{\cos\varphi^2} \text{ und } r = \frac{c}{\cos\varphi^2}, \text{ daher}$$

$$M'M = r' - r = \frac{c' - c}{\cos\varphi^2}.$$

Nun iſt der Zähler $c' - c$ eine beſtändige, der Nenner $\cos\varphi^2$ aber eine veränderliche Größe, daher iſt auch der Abſtand $M'M$ veränderlich, weil ſolcher mit dem Winkel φ zugleich wächſt.

§. 106.

2. Zuſatz. Eben ſo läßt ſich beweiſen, daß, wenn AMB, Tafel XIII. Figur 213. des zweiten Bandes, eine Kettenlinie iſt, und die normalen Abſtände MM' und MM'' durchgängig einander gleich ſind, die krummen Linien $A'M'B'$ und $A''M''B''$, welche den Raum $A'B'B''A'' = f'$ begrenzen, von der Kettenlinie verſchieden ſeyn müſſen.

Die Beſtimmung des Inhalts f' wird in dieſem Falle, wo die mittlere Kurve AM eine Kettenlinie iſt, ſehr einfach, denn es iſt hier $M'm'm''M'' = \partial f' = b\partial v$, daher die Fläche

$$f' = bv = b\sqrt{(2cx + x^2)}.$$

§. 107.

Aufgabe. Durch die krumme Linie $A'N$, Tafel XIII. Figur 209. des zweiten Bandes, ſei der Raum $AA'NM = f$ dergeſtalt begrenzt, daß auf der Kettenlinie AM ſämmtliche normale Abſtände wie $MN = z$ nach einem gewiſſen Geſetze, von AA' nach MN wachſen; man ſucht den Flächeninhalt f. Taf. XIII. Fig. 209.

Auflöſung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung für die Kettenlinie AM ſei der Werth von z durch die Gleichung

$$2rz + z^2 = \frac{2cb + b^2}{\cos\varphi^2}$$

gegeben, ſo iſt, weil §. 99. (III) $\cos\varphi^2 = \frac{c}{r}$,

$$\frac{2rz + z^2}{2r} = \frac{2bc + b^2}{2c}.$$

Nun iſt wie §. 104.

$\partial f = \frac{2rz + z^2}{2r}\partial v$, alſo $= \frac{2bc + b^2}{2c}\partial v$, daher, wenn integrirt wird,

$$f = \frac{2bc + b^2}{2c}.v = \frac{2bc + b^2}{2c}\sqrt{(2cx + x^2)},$$

wo keine Conſtante hinzukommt.

Für $x = h$ erhält man

$$f = \frac{2bc + b^2}{2c}\sqrt{(2ch + h^2)},$$

welches einen ſehr einfachen Ausdruck zur Beſtimmung des Flächenraums $AA'M'M$ giebt.

§. 108.

Zuſatz. Wäre hingegen zur Beſtimmung des Abſtandes $MM' = z$ die Gleichung

$$2rz + z^2 = \frac{2cb + b^2}{(\cos\varphi - n\sin\varphi)^2}$$

gegeben, ſo iſt

$$\frac{2rz + z^2}{2r} = \frac{2bc + b^2}{2r(\cos\varphi - n\sin\varphi)^2},$$

und wenn für r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ aus §. 99. (I) und 97. III. IV. die Werthe geſetzt werden, ſo erhält man

$$\frac{2rz + z^2}{2r} = \frac{bc(2c + b)}{2(c - nv)^2}, \text{ daher}$$

$$\partial f = \frac{bc(2c + b)}{2}\cdot\frac{\partial v}{(c - nv)^2}.$$

Wird $c - nv = w$ geſetzt, ſo iſt das Integral

$$\int\frac{\partial v}{(c - nv)^2} = \int\frac{-\partial w}{nw^2} = \frac{1}{nw} = \frac{1}{n(c - nv)} + \text{Const.}$$

Für $v = 0$ iſt $f = 0$, alſo Const. $= -\frac{1}{nc}$, daher

$$\int \frac{\partial v}{(c - nv)^2} = \frac{1}{n(c - nv)} + \frac{1}{nc} = \frac{v}{c(c - nv)},$$ folglich der Flächeninhalt

$$f = \frac{(2c + b)\,bv}{2\,(c - nv)},$$

wo $v = \surd(2cx + x^2)$ iſt.

§. 109.

Der körperliche Inhalt des Konoids, welches durch die Umdrehung der Kettenfläche AMP, Figur 39., um die Axe AP erzeugt wird, ſei Q, ſo iſt das Element dieſes Körpers Taf. V. Fig. 39.

$$\partial Q = \pi y^2 \partial x, \text{ alſo } \frac{Q}{\pi} = \int y^2 \partial x.$$

Aber (P. A. S. 143. §. 38.)

$\int y^2 \partial x = xy^2 - \int 2xy\partial y$ und

$\int xy\partial y = y\int x\partial y - \int(\partial y \int x\partial y)$, alſo

$\frac{Q}{\pi} = xy^2 - 2y\int x\partial y + 2\int \partial y \int x\partial y.$

Nach §. 103. iſt

$\int x\partial y = c\surd(2cx + x^2) - cy$, alſo

$\int \partial y \int x\partial y = \int c\partial y \surd(2cx + x^2) - \int cy\partial y,$

oder wenn nach §. 92. (II) $\frac{c\partial x}{\surd(2cx + x^2)}$ ſtatt ∂y geſetzt wird,

$\int \partial y \int x\partial y = \int c^2 \partial x - \int cy\partial y = c^2 x - \frac{1}{2}cy^2 + \text{Const.},$

folglich

$\frac{Q}{\pi} = xy^2 - 2cy\surd(2cx + x^2) + 2cy^2 + 2c^2x - cy^2,$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil Q und y mit $x = 0$ verſchwinden. Es iſt daher der geſuchte Inhalt des Konoids

$$Q = \pi [2c^2x + (c+x)y^2 - 2cy\sqrt{(2cx + x^2)}]$$
$$= \pi [2c^2x + (c+x)y^2 - 2cyv].$$

§. 110.

Die krumme Oberfläche eines durch die Umdrehung
Taf. V Fig. 39. der Kettenlinie AM, Figur 39., um die Axe AP entſtandenen Konoids ſei K, ſo iſt

$K = \int 2\pi y \partial v = 2\pi (vy - \int v \partial y)$. Aber §. 92. II.

$v \partial y = c \partial x$, alſo $\int v \partial y = \int c \partial x = cx$, daher iſt die krumme Oberfläche des Kettenkonoids

$$K = 2\pi (vy - cx) = 2\pi [y\sqrt{(2cx + x^2)} - cx].$$

Die Beſtimmung von den Schwerpunkten derjenigen Figuren, welche ſich auf die Kettenlinie beziehen, findet man im vierten Kapitel. Ueber die Kettenlinie ſelbſt kann man die §. 151. angeführten Eulerſchen Abhandlungen nachleſen.

Siebenter Abſchnitt.

Von der elaſtiſchen Linie.

§. 111.

Was hier unter einem elaſtiſchen Körper verſtanden wird, kann nach §. 427. des zweiten Bandes als bekannt vorausgeſetzt werden. Eben ſo wird hier, wenn von elaſtiſchen Ruthen die Rede iſt, und dabei nichts weiter erinnert wird, jederzeit vorausgeſetzt, daß ſolche eine prismatiſche Geſtalt und durchgängig gleiche Elaſticität haben, ſo wie auch bei dieſer Unterſuchung die vorzüglichſten Lehren der Statik als bekannt angenommen werden.

Befeſtigt man eine elaſtiſche Ruthe an einem oder in mehreren Punkten, ſo wird ſolche durch angebrachte Kräfte oder auch ſchon durch ihr eigenes Gewicht irgend eine Krümmung erhalten, wodurch einige Theile der Ruthe ausgedehnt, andere zuſammengedrückt werden. Zwiſchen dieſen müſſen ſich Theile oder Faſern befinden, welche weder ausgedehnt noch zuſammengedrückt ſind, und wenn man hiedurch eine Linie zieht, ſo läßt ſich die Krümmung der Ruthe danach beurtheilen. Dieſe Linie nennt man alsdann eine elaſtiſche Linie (Curva elastica), und in dieſer Hinſicht iſt es ſtatthaft, bei den elaſtiſchen Linien die Ruthen ohne Dicke anzunehmen, wie in der Folge geſchehn wird.

I. Wenn die elaſtiſche Ruthe nur wenig gebogen iſt.

§. 112.

Taf. V. Fig. 41. In der vertikalen Wand BC, Figur 41., ſei eine gewichtloſe elaſtiſche Ruthe befeſtigt, ſo daß ſie in ihrem natürlichen Zuſtande in die horizontale Lage BT′ fällt; die Lage BMA aber annimmt, wenn an ihrem Ende ein Gewicht Q aufgehängt wird. Man ſetze voraus, daß die Krümmung der Ruthe AMB nur ſehr wenig von der Horizontallinie AC abweiche; nehme für irgend einen Punkt M die ſenkrechten Koordinaten $AP = x$, $PM = y$ und den Bogen $AM = v$. Die zum Punkte M gehörige Tangente MT ſchneide die Abſciſſenaxe unter dem Winkel $MTA = \psi$, und der Krümmungshalbmeſſer MR für dieſen Punkt ſei $= r$. Ferner ſei $AC = a$, $CB = u$.

x y r a u

Nun iſt (nach §. 444. im zweiten Bande der Statik), wenn E^2 die relative Elaſticität der Ruthe AM bezeichnet,

$$E^2 = rxQ \text{ oder } \frac{E^2}{r} = xQ,$$

wo E^2 eine beſtändige Größe iſt. Nach bekannten Lehren von den Eigenſchaften der krummen Linien iſt aber, wenn das Element ∂x conſtant geſetzt wird,

$$r = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y};$$

oder weil hier angenommen wird, daß die Ruthe nur äußerſt wenig gebogen iſt, ſo kann man um ſo mehr das Bogenelement $\partial v = \partial x$ annehmen, je kleiner die Biegung iſt. Unter dieſer Vorausſetzung erhält man daher

$$r = \frac{-\partial x^3}{\partial x \partial^2 y} = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}, \text{ folglich}$$

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - Q x \partial x.$$

Hievon findet man das Integral, weil ∂x conſtant iſt,

$$\frac{E^2}{\partial x} \int \partial^2 y = - Q \int x \partial x, \text{ oder}$$

$$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = - \tfrac{1}{2} Q x^2 + \text{Const.}$$

Es iſt aber $\partial y = \partial x \operatorname{tgt} \psi$, alſo $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt} \psi$, und weil für $x = a$ der Winkel $\psi = o$ wird, ſo erhält man in dieſem Falle $\frac{\partial y}{\partial x} = o$, daher

$$o = - \tfrac{1}{2} Q a^2 + \text{Const.}, \text{ folglich}$$

$$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2} (a^2 - x^2) Q \text{ oder } E^2 \partial y = \tfrac{1}{2} (a^2 - x^2) \partial x Q.$$

Wird nochmals integrirt, ſo iſt

$$\text{(I) } E^2 y = \tfrac{1}{2} (a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3) Q \text{ oder } y = (3 a^2 x - x^3) \frac{Q}{6 E^2},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $x = o$ auch y verſchwindet.

Für $x = a$ wird $y = u$, alſo

$$6 E^2 u = (3 a^2 - a^2) a Q,$$

man erhält daher die größte Ordinate BC, oder

$$\text{(II) } u = \frac{a^3 Q}{3 E^2}.$$

Weil $E^2 = r x Q$ iſt, ſo findet man den Krümmungshalbmeſſer für den Punkt M, oder

$$r = \frac{E^2}{x Q}.$$

Setzt man ſtatt E^2 ſeinen Werth aus (II), ſo iſt auch

$$\text{(III) } r = \frac{a^3}{3 u x}.$$

Für $x = o$ wird $r = \infty$, alſo iſt die Ruthe im Aufhängepunkte A gar nicht gekrümmt oder grade. Der Krümmungshalbmeſſer wird deſto kleiner, je größer x

wird, und die Ruthe iſt am meiſten gebogen, wo x ſeinen größten Werth = a erhält. Für dieſen Fall oder im Befeſtigungspunkte B iſt der Krümmungshalbmeſſer

$$= \frac{a^2}{3u},$$

welches zugleich der kleinſte Krümmungshalbmeſſer für die gebogene Ruthe iſt.

§. 113.

Taf. V. Fig. 41. Statt die elaſtiſche Ruthe AMB, Figur 41., an ihrem Ende A mit einem Gewichte zu belaſten, ſetze man voraus, daß ſie lediglich durch ihr eigenes auf ihre ganze Länge gleichförmig verbreitetes Gewicht gebogen werde, ohne daß an ihrem Ende noch ein Gewicht aufgehängt ſei. Wird hier nun ebenfalls die Ruthe nur äußerſt wenig gebogen angenommen, und werden die übrigen Bezeichnungen des vorigen §. beibehalten, ſo ſei das Gewicht von den einzelnen Längen der Ruthe den zugehörigen Längen

G der Horizontale AC proportional. Iſt nun G das Gewicht von jedem Fuße der Ruthe, ſo erhält man das Gewicht von AM = xG, und das Gewicht der ganzen Ruthe AMB = aG.

Für den Punkt M iſt die Summe aller Momente von M bis A $= \frac{1}{2}x \cdot xG$, alſo §. 112.

$E^2 = r \cdot \frac{1}{2}x^2 G$, oder man findet, weil §. 112.

$$r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y} \text{ iſt,}$$

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = -\tfrac{1}{2} G x^2 \partial x, \text{ und hievon das Integral}$$

$$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = -\tfrac{1}{6} G x^3 + \text{Const.}$$

Aber $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tgt}\,\psi$, und weil für $x = a$ der Winkel

$\psi = 0$ wird, ſo iſt $0 = -\frac{1}{6}Ga^3 + \text{Const.}$, daher $E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{6}(a^3 - x^3)G$ oder $E^2 \partial y = \frac{1}{6}(a^3 - x^3)\partial x G$. Nochmals integrirt, giebt

$$E^2 y = \frac{1}{6}(a^3 x - \frac{1}{4}x^4)G, \text{ oder}$$

$$(\text{I})\ y = (4a^3 x - x^4)\frac{G}{24 E^2},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil y mit $x = 0$ verſchwindet.

Für $x = a$ wird $y = BC = u$; man findet daher die größte Ordinate

$$(\text{II})\ u = \frac{a^4 G}{8 E^2},$$

und weil $E^2 = \frac{1}{2} r x^2 G$, alſo $r = \frac{2 E^2}{x^2 G}$ iſt, ſo findet man, wenn aus (II) der Werth von E^2 in die letzte Gleichung geſetzt wird, den Krümmungshalbmeſſer für den Punkt M, oder

$$(\text{III})\ r = \frac{a^4}{4 u x^2}.$$

Im Befeſtigungspunkte B erhält der Krümmungshalbmeſſer ſeinen kleinſten Werth für $x = a$, daher iſt derſelbe in dieſem Falle

$$= \frac{a^2}{4u}.$$

§. 114.

Für die gewichtloſe Ruthe, an deren Ende die Laſt Q aufgehängt iſt, war

$$y = (3a^2 x - x^3)\frac{Q}{6 E^2},$$

und für die ſchwere Ruthe

$$y = (4a^3 x - x^4)\frac{G}{24 E^2}.$$

Das ganze Gewicht der ſchweren Ruthe war aG.

Nimmt man nun an, daß das Gewicht der ſchweren Ruthe eben ſo groß ſei, als die Laſt Q am Ende der gewichtloſen Ruthe, ſo erhält man $aG = Q$, oder

$$G = \frac{Q}{a}, \text{ alſo } y = (4a^3x - x^4)\frac{Q}{24aE^2},$$

woraus folgt, daß die beiden krummen Linien, welche die Ruthe bildet, wenn an ihrem Ende eine Laſt Q aufgehängt, oder wenn dieſe Laſt auf der ganzen Ruthe gleichförmig vertheilt wird, für einerlei Länge a, von einander verſchieden ſind.

Für die gewichtloſe Ruthe findet man die größte Ordinate §. 112. (II).

$$u = \frac{a^3 Q}{3E^2},$$

und für die ſchwere Ruthe, wenn §. 113. (II) $aG = Q$, alſo $\frac{Q}{a}$ ſtatt G geſetzt wird, oder wenn man annimmt, das Gewicht Q ſei auf der Ruthe gleichförmig verbreitet,

$$u = \frac{a^3 Q}{8E^2},$$

woraus folgt, daß ſich die größte Ordinate bei der gewichtloſen an ihrem Ende belaſteten Ruthe zur größten Ordinate der ſchweren Ruthe, unter übrigens gleichen Umſtänden, wie 8 zu 3 verhält.

Bei der gewichtloſen Ruthe iſt der kleinſte Krümmungshalbmeſſer im Punkte B, §. 112.

$$= \frac{a^2}{3u},$$

und bei der ſchweren Ruthe iſt dieſer kleinſte Krümmungshalbmeſſer §. 113.

$$= \frac{a^2}{4u};$$

alſo

alſo wird die an ihrem Ende belaſtete Ruthe an ihrem Befeſtigungspunkte B weit ſtärker gebogen, als wenn man dieſes Gewicht auf die ganze Ruthe verbreitet hätte.

Wollte man am Ende A der gewichtloſen Ruthe ein Gewicht q aufhängen, welches die Ruthe bei B eben ſo biegt, als wenn die Laſt Q auf der ganzen Ruthe gleichförmig verbreitet wäre, ſo muß in beiden Fällen der Krümmungshalbmeſſer bei B gleich groß ſeyn. Nun iſt für das Gewicht q dieſer Krümmungshalbmeſſer $= \frac{E^2}{a\,q}$ (§. 112.), und für das auf der Ruthe verbreitete Gewicht Q iſt dieſer Krümmungshalbmeſſer $= \frac{2E^2}{aQ}$ (§. 113.), daher $\frac{2E^2}{aQ} = \frac{E^2}{a\,q}$, folglich $q = \frac{1}{2}Q$.

oder eine gewichtloſe elaſtiſche Ruthe wird an ihrem Befeſtigungspunkte, durch ein an ihrem Ende aufgehängtes Gewicht, eben ſo gekrümmt, als wenn man das doppelte Gewicht auf ihre ganze Länge gleichförmig verbreitet hätte.

§. 115.

In der feſten vertikalen Wand CE, Figur 42., ſei eine gewichtloſe elaſtiſche Ruthe ſo befeſtigt, daß ihre Richtung im natürlichen Zuſtande in die grade Linie A′B′ fällt. Auch ſoll die Ruthe auf einer Seite der Wand CE, welche hier ohne Dicke vorausgeſetzt wird, gebogen werden können, ohne daß ſolches auf die Biegung der andern Seite Einfluß hat. Durch die Gewichte Q in A, Q′ in B, werde die Ruthe aus der Lage A′CB′ in die Lage ACB gebracht, und man nehme an, daß ſich die aufgehängten Gewichte umgekehrt wie ihre Abſtände von der Taf. V. Fig. 42.

vertikalen Wand verhalten, oder wenn $AD = x$, $BE = x'$ iſt, daß $xQ = x'Q'$ werde. Für den Bogen AC ſei r der Krümmungshalbmeſſer in C, und auf der andern Seite der Wand für BC in $C = r'$, ſo iſt §. 112.

$$E^2 = rxQ \text{ und } E^2 = r'x'Q',$$

weil E^2 für beide Ruthen einerlei iſt. Man erhält daher $rxQ = r'x'Q'$, oder weil $xQ = x'Q'$ iſt, ſo wird $r = r'$, alſo iſt die Ruthe AB auf beiden Seiten unmittelbar an der Wand CE auf einerlei Weiſe gekrümmt, es müſſen ſich daher die Spannungen der Fibern bei C von beiden Seiten im Gleichgewichte halten, und wenn die Ruthe nur in einem einzigen Punkte bei C ſo befeſtigt wird, daß ſie ſich um denſelben frei drehen kann, ohne auszuweichen, ſo kann die Wand CE weggenommen werden, und Q bleibt noch im Gleichgewichte mit Q′, oder die Ruthe behält ihre vorige Krümmung. Der feſte Punkt bei C leidet vertikal unterwärts einen Druck $= Q + Q'$, und wenn die Enden A und B durch Stifte befeſtigt, und die Gewichte Q, Q′, weggenommen werden, ſo leidet A einen vertikalen Druck Q aufwärts, und B einen Druck Q′ nach einer damit parallelen Richtung. Statt des Stifts bei C, welcher mit der Kraft $Q + Q'$ unterwärts gedrückt wird, kann man nun eine Kraft $P = Q + Q'$ vertikal aufwärts anbringen, und es muß noch alles im Gleichgewichte ſeyn.

Denkt man nun die Ruthe AB umgedreht, ſo daß ſie nach unten gebogen iſt, ſo ſind A, B die Unterſtützungspunkte der Ruthe, an welchen ſie befeſtigt iſt, und in C hängt abwärts eine Laſt $P = Q + Q'$, welche auf das Ende bei A den vertikalen Druck Q, und bei B den Ver-

tikaldruck Q' verurſacht. Hieraus folgt, daß wenn eine an beiden Enden unterſtützte Ruthe in irgend einem Punkte belaſtet wird, ſo muß ſie eben ſo gebogen werden, als wenn an den Enden derſelben Kräfte angebracht wären, welche den Preſſungen auf die Unterſtützungspunkte gleich ſind. Auch werden dieſe Vertikalpreſſungen eben ſo wie am Hebel nach der Lehre von der Gleichheit der Momente beſtimmt.

Eben dieſe Folgerungen erhält man, wenn vorausgeſetzt wird, daß die elaſtiſche Ruthe durch ihr eigenes Gewicht gebogen werde. (§. 113.)

§. 116.

Aufgabe. Eine gewichtloſe elaſtiſche Ruthe AMB, Figur 43., iſt an ihren Enden A, B, welche in einerlei Horizonte liegen, unterſtützt, und bei K mit einem Gewichte P belaſtet; man ſucht die Geſtalt der Kurve AMB, wenn vorausgeſetzt wird, daß die Krümmung derſelben nur wenig von der graden Linie abweicht. Taf. V. Fig. 43.

Auflöſung. Für irgend einen Punkt M zwiſchen AK ſei MP ſenkrecht auf AB, und die verlängerte Richtung der Kraft P ſchneide AB in D. Man ſetze AP = x, PM = y, AD = a, AB = c, und wenn KT die Tangente für den Punkt K iſt, den Winkel ATK = ψ. Der Vertikaldruck auf die Unterſtützung bei A ſei = Q, auf B = Q', ſo werden gleiche Kräfte Q, Q' in A, B, vertikal aufwärts angebracht, die Stützen entbehrlich machen.

x
y
a
c
ψ
Q
Q'

Wegen des nöthigen Gleichgewichts erhält man §. 115.

$$cQ = (c - a)P, \text{ alſo } Q = \frac{c-a}{c} P.$$

Nach §. 112. iſt ferner $E^2 = rM$, oder weil nach demſelben §. $r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}$ iſt, ſo erhält man

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - M \partial x.$$

Für den Punkt M erhält man das Moment

$$M = xQ = \frac{(c-a)\,x}{c} P, \text{ daher}$$

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - \frac{(c-a)\,x \partial x}{c} P.$$

Wird integrirt, ſo findet man, weil ∂x conſtant iſt,

$$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = - \frac{(c-a)\,x^2}{2c} P + \text{Const.}$$

Für $x = a$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tgt}\,\psi$, alſo

$$\text{Const} = E^2 \,\text{tgt}\,\psi + \frac{a^2\,(c-a)}{2c} P, \text{ daher,}$$

wenn mit $6c\partial x$ multiplizirt wird,

$$6cE^2 \partial y = 3(c-a)(a^2 - x^2)\partial x P + 6c\partial x E^2 \,\text{tgt}\,\psi.$$

Integrirt man nochmals, ſo iſt

$$6cE^2 y = (c-a)(3a^2 - x^2)xP + 6cxE^2 \,\text{tgt}\,\psi \text{ [I]},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil x mit y zugleich verſchwindet.

u Man ſetze $DK = u$, ſo wird $y = u$ für $x = a$, alſo

$$6cE^2 u = 2(c-a)\,a^3 P + 6acE^2 \,\text{tgt}\,\psi \text{ [II]}.$$

Um auch eine Gleichung für die Kurve $KM'B$ zu erhalten, ſetze man $DP' = x'$, $P'M' = y'$, ſo iſt für den Punkt M' das Moment

x' y'

$$M = P'B \,.\, Q' = (c - a - x')\,Q',$$

oder weil $cQ' = aP$, alſo $Q' = \frac{a}{c} P$, ſo wird

$$M = \frac{a\,(c-a-x')}{c} P, \text{ alſo}$$

$\frac{E^2 \partial^2 y'}{\partial x'} = - \frac{a(c-a-x')\partial x'}{c} P$; davon das Integral, giebt

$\frac{E^2 \partial y'}{\partial x'} = - \frac{a(c-a-\frac{1}{2}x')x'}{c} P + Const.$

Für $x' = o$ wird $\frac{\partial y'}{\partial x'} = tgt\,\psi$, alſo

$Const. = E^2\, tgt\,\psi$, daher, wenn durchgängig mit $6c\partial x'$ multiplizirt wird,

$6cE^2\partial y' = -3a(2c-2a-x')x'\partial x' P + 6c\partial x' E^2 tgt\,\psi$,

und wenn man nochmals integrirt,

$6cE^2 y' = -a(3c-3a-x')x'^2 P + 6cx' E^2 tgt\,\psi + Const.$

Für $x' = o$ wird $y' = u$, alſo $Const. = 6cE^2 u$, daher

$6cE^2 y' = 6cE^2 u - a(3c-3a-x')x'^2 P + 6cx' E^2 tgt\,\psi$ [III].

Für $x' = c - a$ wird $y' = o$, daher

$6cE^2 u = 2a(c-a)^3 P - 6c(c-a)E^2 tgt\,\psi$ [IV].

Wird dieſer Ausdruck von [II] abgezogen, ſo erhält man nach gehöriger Entwickelung

$6cE^2 tgt\,\psi = 2a(c-a)(c-2a)P$ [V]

und dieſen Ausdruck in [IV] ſtatt $6cE^2\, tgt\,\psi$ geſetzt, giebt

$6cE^2 u = 2a^2(c-a)^2 P$ [VI], alſo auch

$6cE^2 = \frac{2a^2(c-a)^2}{u} P$ [VII].

Setzt man die gefundenen Ausdrücke [V. VI. VII.] in die Gleichungen [I] und [III], ſo erhält man, wenn u bekannt iſt, nachſtehende Gleichungen für die Geſtalt der krummen Linie AKB,

(I) $y = \frac{a(2c-a)-x^2}{2a^2(c-a)} ux.$

(II) $y' = u + \frac{(c-2a)u}{a(c-a)} x' - \frac{3u}{2a(c-a)} x'^2 + \frac{u}{2a(c-a)^2} x'^3.$

Endlich erhält man noch aus [V]

$$\text{(III)} \quad \operatorname{tgt} \psi = \frac{(c - 2a)\,u}{a\,(c - a)}, \text{ und aus [VI]}$$

$$\text{(IV)} \quad u = \frac{a^2\,(c - a)^2}{3cE^2}\,P.$$

Bei dem Gebrauche der Gleichungen (I) und (II) iſt wohl zu bemerken, daß x nicht größer als a, und y' nicht größer als c — a genommen werden darf, wie es die Bedingungen der Gleichungen erfordern.

§. 117.

1. Zuſatz. Um denjenigen Punkt der gebogenen Ruthe auszumitteln, welcher am weiteſten von der Horizontale AB entfernt iſt, darf man nur die größte Ordinate
Taf. V. Fig. 43.
aufſuchen. Nun iſt nach (I) und (II)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a\,(2c - a)\,u - 3ux^2}{2a^2\,(c - a)},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{3ux}{a^2\,(c - a)},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{(c - 2a)\,u}{a\,(c - a)} - \frac{3ux'}{a\,(c - a)} + \frac{3ux'^2}{2a\,(c - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = \frac{3ux'}{a\,(c - a)^2} - \frac{3u}{a\,(c - a)} = \frac{-3u\,(c - a - x')}{a\,(c - a)^2}.$$

Da nun $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 y'}{\partial x'}$ für jeden poſitiven Werth von x und x' negativ werden, ſo erhält man hienach für y und y' größte Werthe.

Die erſte Gleichung giebt zur Beſtimmung des größten Werths für y

$$0 = \frac{a\,(2c - a)\,u - 3ux^2}{2a^2\,(c - a)} \text{ oder } 3ux^2 = a\,(2c - a)\,u, \text{ daher}$$

$$x = \sqrt{\frac{a\,(2c - a)}{3}},$$

und weil x nicht größer als a, alſo $\frac{a\,(2c - a)}{3}$ nicht grö-

ßer als a^2, oder c nicht größer als $2a$ werden kann, ſo giebt es nur ein Größtes für y, wenn c nicht größer als $2a$ iſt. Wenn hingegen c größer als $2a$ wird, oder wenn der Punkt D, Figur 43., näher bei A als bei B liegt, ſo giebt es zwiſchen A und D kein Größtes für y. Taf. V. Fig. 43.

Den größten Werth für y' zu finden, ſetze man

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = 0 = \frac{(c-2a)u}{a(c-a)} - \frac{3ux'}{a(c-a)} + \frac{3ux'^2}{2a(c-a)^2}, \text{ alſo}$$

$$x' = (c-a) \pm \sqrt{[\tfrac{1}{3}(c-a)(c+a)]}.$$

Weil nun x' nicht größer als $(c-a)$ werden darf, ſo muß das Zeichen vor der Wurzel negativ ſeyn. Damit aber x' nicht negativ werde, ſo muß $\frac{1}{3}(c+a)$ nicht größer als $(c-a)$ oder a nicht größer als $\frac{1}{2}c$ werden. Es kann daher nur ein Größtes zwiſche D und B ſtatt finden, wenn a nicht größer als $\frac{1}{2}c$ iſt.

Hieraus folgt überhaupt, daß der tiefſte Punkt der gebogenen Ruthe allemal zwiſchen den Aufhängepunkt und denjenigen Unterſtützungspunkt fällt, welcher am weiteſten vom Aufhängepunkte entfernt iſt.

Fällt die Laſt P in die Mitte zwiſchen die Unterſtützungspunkte, ſo iſt für die größten Werthe von y und y', weil alsdann $c = 2a$ iſt,

$$x = a \text{ und } x' = 0,$$

oder der tiefſte Punkt fällt alsdann in die Mitte der Ruthe.

§. 118.

2. Zuſatz. Für jede Stelle der Kurve findet man (§. 116.) den Krümmungshalbmeſſer $r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}$, daher iſt derſelbe

von A bis K, $r = \frac{a^2 (c - a)}{3ux}$,

von K bis B, $r = \frac{a (c - a)^2}{3u (c - a - x')}$.

Der Krümmungshalbmeſſer wird daher am kleinſten, wenn x ſeinen größten oder x' ſeinen kleinſten Werth erhält. Da dies nun für $x = a$ und für $x' = o$ der Fall iſt, ſo folgt hieraus, daß die krumme Linie AKM bei K, wo das Gewicht P aufgehängt iſt, am meiſten gekrümmt wird.

Für $x = o$ und für $x' = c - a$ wird $r = \infty$, oder bei den Unterſtützungspunkten A, B hat die Kurve keine Krümmung, ſondern geht in eine grade Linie über.

In der Stelle K, wo das Gewicht P aufgehängt iſt, wird $x = a$ oder $x' = o$, daher iſt daſelbſt der Krümmungshalbmeſſer

$$= \frac{a (c - a)}{3u},$$

oder wenn man aus §. 116. (IV) ſtatt u ſeinen Werth ſetzt,

$$= \frac{cE^2}{a (c - a) P}.$$

Weil nun für alle Werthe, welche a erhalten kann, das Produkt $a (c - a)$ am größten wird, wenn man $a = \frac{1}{2}c$ ſetzt, ſo folgt daraus, daß unter übrigens gleichen Umſtänden die elaſtiſche Ruthe am Aufhängepunkte die ſtärkſte Krümmung erhält, wenn man die Laſt in der Mitte aufhängt.

§. 119.

3. Zuſatz. Hängt das Gewicht P in der Mitte der Ruthe, ſo iſt $c = 2a$, alſo §. 116.

$$(I)\ y = \frac{3u}{2a} x - \frac{u}{2a^3} x^3, \text{ und}$$

$$y' = u - \frac{3u}{2a^2} x'^2 + \frac{u}{2a^3} x'^3.$$

Man nehme, Figur 43., DP = DP′ = x′, ſo wird Taf. V. Fig. 43.
AP = a — x′, ſetzt man dieſen Werth ſtatt x in (I), ſo erhält man

$$PM = y = u - \frac{3u}{2a^2} x'^2 + \frac{u}{2a^3} x'^3 = y',$$

woraus folgt, daß beide Schenkel KA und KB einander gleich und ähnlich ſind, oder daß die gebogene Ruthe eine ſymmetriſche krumme Linie bildet, deren Axe durch den Aufhängepunkt K geht. Auch iſt die Gleichung (I) zur Beſtimmung der Natur dieſer krummen Linie allein hinreichend.

Für c = 2a §. 116. [VI] erhält man die relative Elaſticität

$$(II)\ E^2 = \frac{a^3}{6u} P = \frac{c^3 P}{48u},$$

ſo daß E^2 leicht aus einem Verſuche, für jede Materie der Ruthe, beſtimmt werden kann.

Weil der Krümmungshalbmeſſer $r = \frac{a^2(c-a)}{3ux}$ iſt, ſo erhält man hier $r = \frac{a^3}{3ux}$, daher iſt der Krümmungshalbmeſſer im Aufhängepunkte

$$= \frac{a^2}{3u} = \frac{c^2}{12u},$$

oder wenn man ſtatt u ſeinen Werth $\frac{a^3 P}{6E^2}$ ſetzt,

$$= \frac{2E^2}{aP} = \frac{4E^2}{cP},$$

welches zugleich der kleinſte Werth für den Krümmungshalbmeſſer iſt.

Weil der Druck auf jeden Unterſtützungspunkt $= Q$, alſo $P = 2Q$ iſt, ſo erhält man auch $u = \frac{a^3 Q}{3E^2}$, und wenn dieſer Werth in die Gleichung (I) geſetzt wird, ſo iſt auch

$$\text{(III)}\ y = \frac{Q}{6E^2}(3a^2x - x^3).$$

§. 120.

Aufgabe. Die krumme Linie einer durch ihr eigenes Gewicht gebogenen elaſtiſchen Ruthe zu finden, wenn ſolche durch kein anderes Gewicht belaſtet iſt.

Auflöſung. Weil hier nur eine geringe Biegung vorausgeſetzt wird, ſo ſei das Gewicht von den einzelnen Längen der Ruthe AMB, Figur 44., den zugehörigen Längen der Horizontale AB proportional. Iſt nun G das Gewicht von jedem Fuße der Ruthe, und man ſetzt $AP = x$, $PM = y$, $AB = c$, ſo iſt das Gewicht von $AM = xG$, und das Gewicht der ganzen Ruthe $= cG$.

Taf. V. Fig. 44. G x y c

Die Stützen bei A und B werden jede mit dem halben Gewichte der Ruthe gedrückt, man kann daher die Stütze bei B wegnehmen, wenn an ihre Stelle die Kraft $Q = \frac{1}{2}cG$ vertikal aufwärts angebracht wird, und das andere Ende bei A unterſtützt bleibt. Weil alle Kräfte im Gleichgewichte ſind, ſo muß dies auch noch beſtehen, wenn der Punkt M befeſtigt wird. Alsdann ſtrebt das Gewicht des Bogens $MB = (c - x)G$, deſſen Moment $\frac{1}{2}(c - x)^2 G$ iſt, die Ruthe MB nach einer Seite, und die Kraft $Q = \frac{1}{2}cG$ nach der entgegengeſetzten Seite zu drehen; es ſind daher die Momente der Kräfte für den Punkt M, oder

$M = \frac{1}{2}c(c-x)G - \frac{1}{2}(c-x)^2 G = \frac{1}{2}x(c-x)G,$
alſo §. 112.

$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = -\frac{1}{2}x(c-x)\partial x G.$ Dies integrirt, giebt

$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}cx^2)G + \text{Const.}$

Für $x = c$ ſei $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tgt}\,\psi$, ſo iſt

$$\text{Const.} = E^2 \,\text{tgt}\,\psi - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{4}c^3,$$

daher, wenn durchgängig mit $24\partial x$ multiplizirt wird,

$24E^2\partial y = 2(2x^3 - 3cx^2 + c^3)\partial x G + 24\partial x E^2 \,\text{tgt}\,\psi.$

Wird nochmals integrirt, ſo iſt

$24E^2 y = (x^4 - 2cx^3 + 2c^3x)G + 24xE^2\,\text{tgt}\,\psi,$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil y mit $x = 0$ verſchwindet. Für $x = c$ wird $y = 0$, alſo

$24E^2 c\,\text{tgt}\,\psi = -c^4 G$, daher $24E^2\,\text{tgt}\,\psi = -c^3 G$,

$$\text{(I)}\quad 24E^2 y = (x^4 - 2cx^3 + c^3x)G.$$

Man ſetze, daß für $x = \frac{1}{2}c = AF$ die zugehörige Ordinate $y = u = FH$ werde, ſo iſt

$24E^2 u = \frac{5c^4}{16}G$ oder $24E^2 = \frac{5c^4}{16u}G$, daher, wenn dieſer Werth in (I) geſetzt wird,

$$\text{(II)}\quad y = \frac{16}{5}(x^4 - 2cx^3 + c^3x)\frac{u}{c^4}.$$

Wird in dieſe Gleichung $c - x$ ſtatt x geſetzt, ſo erhält y eben denſelben Werth, als wenn x unverändert ſtehen bleibt; es folgt alſo, daß die Axe HF die Kurve AHB in zwei gleiche und ähnliche Schenkel AH und BH eintheilt. Es iſt daher auch

$$u = \frac{5c^4}{384E^2}G$$

die größte Ordinate, welche der Abſciſſe $x = \frac{1}{2}c$ entſpricht.

§. 121.

Zuſatz. Der Krümmungshalbmeſſer iſt nach §. 116. $r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}$. Weil nach (II)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{16\,u}{5\,c^4}\,(4x^3 - 6\,c\,x^2 + c^3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\,\frac{192\,u\,(c - x)\,x}{5.c^4}$$ iſt, ſo erhält man

$$r = \frac{5\,c^4}{192\,u\,(c - x)\,x}.$$

Für $x = 0$ und $x = c$ wird $r = \infty$, daher geht die Krümmung der Ruthe bei den Unterſtützungspunkten A und B in eine grade Linie über.

Für $x = \frac{1}{2}c$ erhält $(c - x)\,x$ ſeinen größten Werth, daher iſt die Ruthe in der Mitte am meiſten gekrümmt, und man findet den Krümmungshalbmeſſer, welcher der Mitte zugehört,

$$= \frac{5\,c^2}{48\,u},$$

oder wenn ſtatt u ſein Werth aus §. 120. geſetzt wird,

$$= \frac{8\,E^2}{c^2\,G}.$$

§. 122.

Vergleicht man die Kurve, welche entſteht, wenn eine Ruthe ohne Schwere in ihrer Mitte durch ein Gewicht gebogen wird, mit derjenigen, welche eine ſchwere, aber nicht mit einem aufgehängten Gewichte belaſtete Ruthe durch ihr eigenes Gewicht bildet, ſo findet ſich, daß beide für gleiche Belaſtung von einander verſchieden ſind. Iſt P das Gewicht, welches an der Ruthe ohne Schwere in der Mitte aufgehängt iſt, und $c\,G$ das Gewicht der ſchweren Ruthe, ſo iſt in dem Falle, daß $c\,G = P$

und c = 2a geſetzt wird, für die ſchwere Ruthe die größte Senkung (§. 120.)

$$u = \frac{5c^3}{384E^2} cG = \frac{5c^3}{384E^2} P,$$

und nach §. 119. (II) für die gleich große gewichtloſe Ruthe, an welcher das Gewicht P aufgehängt iſt,

$$u = \frac{c^3}{48E^2} P = \frac{8c^3}{384E^2} P.$$

Es folgt hieraus, daß ſich unter den angenommenen Vorausſetzungen die größten Ordinaten wie 5 zu 8 verhalten, oder wenn man eine Laſt auf einer Ruthe gleichförmig vertheilt, ſo wird der größte Abſtand von ihrer urſprünglichen Lage nur $\frac{5}{8}$ von demjenigen Abſtande betragen, welcher entſteht, wenn man die vertheilte Laſt in ihrer Mitte aufgehängt hätte.

Für die ſchwere Ruthe iſt nach §. 121. der Krümmungshalbmeſſer in ihrer Mitte

$$r = \frac{8E^2}{c^2G} = \frac{4E^2}{aP},$$

und nach §. 119. für die gleich große gewichtloſe Ruthe, an welcher das Gewicht P in der Mitte aufgehängt iſt,

$$r = \frac{2E^2}{aP}.$$

Der Krümmungshalbmeſſer iſt daher in der Mitte einer Ruthe, auf welcher man das Gewicht P gleichförmig verbreitet, doppelt ſo groß, als wenn die Laſt P in der Mitte der Ruthe aufgehängt wird. Oder eine Ruthe, auf welcher die Laſt gleichförmig verbreitet wird, erhält in ihrer Mitte eben die Krümmung, als wenn man die Hälfte der Laſt in einen einzigen Punkt ihrer Mitte vereinigt aufhängt.

§. 123.

Aufgabe. Ein gleichförmig ſchwerer elaſtiſcher Balken iſt in drei Punkten unterſtüzt, und zwiſchen jeden zwei Unterſtüzungspunkten mit einem Gewichte belaſtet; man ſucht den Druck auf jeden Unterſtüzungspunkt, wenn vorausgeſezt wird, daß die Biegung des Balkens nur äußerſt wenig von der graden Linie abweiche.

Taf. V. Fig. 45. Auflöſung. Der Balken AHBKC, Figur 45, ſei in den Punkten A, B, C, welche in einerlei Horizonte liegen, unterſtüzt, und in H und K mit Gewichten P und P′ belaſtet. Jeder Fuß von der Länge des Balkens wiege G Pfund, und es ſei der Druck auf $A = Q$, auf $B = Q'$, auf $C = Q''$. Ferner $AD = a$, $AF = b$, $AB = c$, $AC = e$; der Winkel, welchen die zum Punkte H gehörige Tangente HT mit AT bildet, oder $ATH = \psi$; eben ſo für den Punkt K der Winkel $KT'C = \psi'$, und der Winkel, unter welchem die zum Punkte B gehörige Tangente der Kurve die Linie AC ſchneidet, $= \psi''$. Man nehme für die unbeſtimmten Punkte M, M′, M″, M‴ der Bogen AH, HB, BK, KC die ſenkrechten Koordinaten $AP = x$, $PM = y$; $DP' = x'$, $P'M' = y'$; $BP'' = x''$, $P''M'' = y''$; $FP''' = x'''$, $P'''M''' = y'''$. Das ganze Gewicht des Balkens ſei eG, alſo des Theils $MC = (e - x)G$.

(Margin: P, P′, G, Q, a, b, c, e, ψ, ψ′, x, y, G)

Werden die Unterſtüzungen in B und C weggenommen, und ſtatt derſelben die Kräfte Q′ und Q″ angebracht, welche mit P, P′ und $(e - x)G$ nach entgegengeſezten Richtungen wirken, ſo kann der ganze Balken ſo angeſehn werden, als wenn derſelbe in A und M befeſtigt wäre, und die Kräfte Q′, Q″; P, P′, $(e - x)G$ müſſen noch

im Gleichgewichte bleiben. Für den Punkt M findet man daher die Momente dieſer Kräfte, oder

$$M = (c-x)Q' + (e-x)Q'' - (a-x)P - (b-x)P' - \tfrac{1}{2}(e-x)^2 G.$$

Nun iſt für das erforderliche Gleichgewicht:

$$Q + Q' + Q'' = P + P' + eG \text{ [I] und}$$

$$cQ' + eQ'' = aP + bP' + \tfrac{1}{2}e^2 G \text{ [II]},$$

daher $M = x(Q - \tfrac{1}{2}xG)$, folglich §. 116.

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = \tfrac{1}{2}x^2 G \partial x - xQ\partial x; \text{ davon das Integral}$$

$$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{6}x^3 G - \tfrac{1}{2}x^2 Q + \text{Const.}$$

Für $x = a$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tgt}\,\psi$, alſo

$$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{6}(x^3 - a^3)G - \tfrac{1}{2}(x^2 - a^2)Q + E^2 \text{tgt}\,\psi,$$

und wenn nochmals integrirt wird,

$$E^2 y = \tfrac{1}{2}(a^2 - \tfrac{1}{3}x^2)xQ - \tfrac{1}{6}(a^3 - \tfrac{1}{4}x^3)xG + xE^2 \text{tgt}\,\psi \text{ [III]},$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil y mit $x = 0$ verſchwindet.

Für $x = a$ werde $y = u$, ſo iſt

$$E^2 u = \tfrac{1}{3}a^3 Q - \tfrac{1}{8}a^4 G + aE^2 \text{tgt}\,\psi \text{ [IV]}.$$

Denkt man ſich nun eben ſo wie vorhin bei M jetzt den Punkt M′ befeſtigt, ſo findet man die Momente der Kräfte für dieſen Punkt, oder

$$M = (c-a-x')Q' + (e-a-x')Q'' - (b-a-x')P' - \tfrac{1}{2}(e-a-x')^2 G$$

oder nach [I] und [II]

$$M = (a+x')Q - x'P - \tfrac{1}{2}(a+x')^2 G, \text{ daher §. 116.}$$

$$\frac{E^2 \partial^2 y'}{\partial x'^2} = x'P + \tfrac{1}{2}(a+x')^2 G - (a+x')Q.$$

Dies integrirt, giebt

$$\frac{E^2 \partial y'}{\partial x'} = \tfrac{1}{2}x'^2 P + \tfrac{1}{2}x'(a^2 + ax' + \tfrac{1}{3}x'^2)G - x'(a + \tfrac{1}{2}x')Q + \text{Const.}$$

Für $x' = 0$ wird $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \text{tgt}\,\psi$, alſo

$$\frac{E^2 \partial y'}{\partial x'} = \tfrac{1}{2}x'^2 P + \tfrac{1}{2}x'(a^2 + ax' + \tfrac{1}{3}x'^2)G - x'(a + \tfrac{1}{2}x')Q + E^2\,\text{tgt}\,\psi,$$

und nochmals integrirt, giebt

$$E^2 y' = \tfrac{1}{6}x'^3 P + \tfrac{1}{2}x'^2(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}ax' + \tfrac{1}{12}x'^2)G - \tfrac{1}{2}x'^2(a + \tfrac{1}{3}x')Q + x'E^2\,\text{tgt}\,\psi + \text{Const.}$$

Für $x' = 0$ wird $y' = u$, alſo

$$E^2 y' = \tfrac{1}{6}x'^3 P + \tfrac{1}{2}x'^2(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}ax' + \tfrac{1}{12}x'^2)G - \tfrac{1}{2}x'^2(a + \tfrac{1}{3}x')Q + x'E^2\,\text{tgt}\,\psi + E^2 u \quad [V].$$

Für $x' = c - a$ wird $y' = 0$, alſo

$$0 = \tfrac{1}{6}(c-a)^3 P + \tfrac{1}{4}(c-a)^2(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}ac + \tfrac{1}{6}c^2)G - \tfrac{1}{6}(c-a)^2(2a+c)Q + (c-a)E^2\,\text{tgt}\,\psi + E^2 u. \quad [VI]$$

Für $x' = c - a$ wird $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \text{tgt}\,\psi''$, daher

$$E^2\,\text{tgt}\,\psi'' = \tfrac{1}{2}(c-a)^2 P + \tfrac{1}{6}(c-a)(a^2+ac+c^2)G - \tfrac{1}{2}(c-a)(c+a)Q + E^2\,\text{tgt}\,\psi \quad [VII].$$

Für den Punkt M'' erhält man die Momente

$$M = (e - c - x'')Q'' - (b - c - x'')P' - \tfrac{1}{2}(e - c - x'')^2 G,$$

daher

$$\frac{E^2 \partial^2 y''}{\partial x''^2} = (b-c)P' - x''P' + \tfrac{1}{2}(e-c-x'')^2 G - (e-c)Q'' + x''Q'',$$

dies integrirt, giebt

$$\frac{E^2 \partial y''}{\partial x''} = (b-c)x''P' - \tfrac{1}{2}x''^2 P' + \tfrac{1}{2}(e-c)^2 x'' G - \tfrac{1}{2}(e-c)x''^2 G + \tfrac{1}{6}x''^3 G - (e-c)x''Q'' + \tfrac{1}{2}x''^2 Q'' + \text{Const.}$$

Für $x'' = 0$ wird $\frac{\partial y''}{\partial x''} = \text{tgt}\,\psi''$, alſo

Const. $= E^2\,\text{tgt}\,\psi''$. Dieſen Werth in die Gleichung geſetzt und integrirt, giebt

$$E^2 y'' = \tfrac{1}{2}(b-c)x''^2 P' - \tfrac{1}{6}x''^3 P' + \tfrac{1}{4}(e-c)^2 x''^2 G - \tfrac{1}{6}(e-c)x''^3 G + \tfrac{1}{24}x''^4 G - \tfrac{1}{2}(e-c)x''^2 Q'' + \tfrac{1}{6}x''^3 Q'' + x''E^2\,\text{tgt}\,\psi'' \quad [VIII]$$

wo keine Conſtante hinzukommt.

Für

Für $x'' = b - c$ werde $y'' = w$, ſo iſt

$$E^2 w = \frac{1}{3}(b-c)^3 P' + (b-c)^2 \left[\frac{1}{4}(e-c)^2 + \frac{1}{24}(b-c)^2 - \frac{1}{6}(b-c)(e-c)\right] G$$
$$- \frac{1}{2}(e-c)(b-c)^2 Q'' + \frac{1}{6}(b-c)^3 Q'' + (b-c) E^2 \operatorname{tgt} \psi'' \text{ [IX]}$$

Für $x'' = b - c$ wird $\frac{\partial y''}{\partial x''} = \operatorname{tgt} \psi'$, daher

$$E^2 \operatorname{tgt} \psi' = \frac{1}{2}(b-c)^2 P' + \frac{1}{2}(b-c)\left[\frac{1}{3}(b-c)^2 + (e-b)(e-c)\right] G$$
$$- (e-c)(b-c) Q'' + \frac{1}{2}(b-c)^2 Q'' + E^2 \operatorname{tgt} \psi''. \text{ [X]}$$

In Beziehung auf den Punkt M''' erhält man das Moment der Kräfte

$$= (e-b-x''')Q'' - \frac{1}{2}(e-b-x''')^2 G, \text{ alſo}$$

$$\frac{E^2 \partial^2 y'''}{\partial x'''^2} = \frac{1}{2}(e-b-x''')^2 G - (e-b-x''') Q''.$$

Dies integrirt, giebt

$$\frac{E^2 \partial y'''}{\partial x'''} = \frac{1}{2} x''' \left[(e-b)^2 - (e-b)x''' + \frac{1}{3} x'''^2\right] G - (e-b) x''' Q'' + \frac{1}{2} x'''^2 Q''$$
$$+ \text{Const.}$$

Für $x''' = o$ wird $\frac{\partial y'''}{\partial x'''} = \operatorname{tgt} \psi'$, alſo Const. $= E^2 \operatorname{tgt} \psi'$. Dieſen Werth in die vorſtehende Gleichung geſetzt und nochmals integrirt, ſo iſt

$$E^2 y''' = x'''^2 \left[\frac{1}{4}(e-b)^2 - \frac{1}{6}(e-b)x''' + \frac{1}{24} x'''^2\right] - (e-b)\frac{1}{2} x'''^2 Q'' + \frac{1}{6} x'''^3 Q''$$
$$+ x''' E^2 \operatorname{tgt} \psi' + \text{Const.}$$

Für $x''' = o$ wird $y''' = w$, daher

$$E^2 y''' = x'''^2 \left[\frac{1}{4}(e-b)^2 - \frac{1}{6}(e-b)x''' + \frac{1}{24} x'''^2\right] - \frac{1}{2}(e-b) x'''^2 Q'' + \frac{1}{6} x'''^3 Q''$$
$$+ x''' E^2 \operatorname{tgt} \psi' + E^2 w. \text{ [XI]}$$

Für $x''' = e - b$ wird $y''' = o$, alſo

$$o = \frac{1}{8}(e-b)^4 G - \frac{1}{3}(e-b)^3 Q'' + (e-b) E^2 \operatorname{tgt} \psi' + E^2 w. \text{ [XII]}$$

Aus [VI] erhält man, wenn ſtatt $E^2 u$ aus [IV] ſein Werth geſetzt und abgekürzt wird,

$$- c E^2 \operatorname{tgt} \psi = \frac{1}{6}(c-a)^3 P + \frac{1}{6} c \left(\frac{1}{4} c^3 - a^3\right) G + \frac{1}{2} c \left(a^2 - \frac{1}{3} c^2\right) Q$$
$$\text{[XIII]}.$$

Wird in die Gleichung [XII] der Werth von $E^2 w$ aus [IX] geſetzt, ſo erhält man daraus $(e-b)E^2 \operatorname{tgt}\psi'$, und wenn die Gleichung [X] mit $(e-b)$ multiplizirt wird, ſo giebt dies gleichfalls einen Ausdruck für $(e-b)E^2 \operatorname{tgt}\psi'$; alsdann die gefundenen Werthe einander gleich geſetzt, ſo erhält man, wenn die Glieder, welche ſich aufheben, weggelaſſen, und der ganze Ausdruck mit 6 c multiplizirt wird,

$$6c(e-c)E^2 \operatorname{tgt}\psi'' = c(b+2c-3e)(b-c)^2 P' - \tfrac{3}{4}c(e-c)^4 G + 2c(e-c)^3 Q''.$$

Aus [VII] erhält man durch die Multiplikation mit c den Werth von $cE^2 \operatorname{tgt}\psi$, und wenn ſtatt $cE^2 \operatorname{tgt}\psi$ der Werth aus [XIII] geſetzt wird, und ſämmtliche Glieder nach gehöriger Abkürzung den Faktor $6(e-c)$ erhalten, ſo iſt

$$6c(e-c)E^2 \operatorname{tgt}\psi'' = (a+2c)(e-c)(c-a)^2 P + \tfrac{3}{4}(e-c)c^4 G - 2c^3(e-c)Q.$$

Die beiden letzten Gleichungen von einander abgezogen, giebt

$$(a+2c)(e-c)(c-a)^2 P + c(3e-2c-b)(b-c)^2 P' + \tfrac{3}{4}ce(e-c)(e^2-3ce+3c^2)G = 2c^3(e-c)Q + 2c(e-c)^3 Q''.$$

Verbindet man dieſen Ausdruck mit den Gleichungen [I] und [II], ſo hat man drei Gleichungen und drei unbekannte Größen Q, Q', Q''. Man kann daher ganz allgemein den Druck auf die Unterlagen A, B, C beſtimmen, wenn außer der eigenen Laſt des Balkens zugleich auf die daran hängenden Gewichte P, P' Rückſicht genommen wird. Setzt man

$$c-a = A;\ b-c = B \text{ und } e-c = C,$$

ſo erhält man nach der erforderlichen Entwickelung die Vertikalpreſſungen

$$Q = \frac{AC(2ce - ac - a^2)P + cB(e-b)(b+c-2e)P' + \frac{1}{4}ceC(c^2 + 3ce - e^2)G}{2c^2e(e-c)}$$

$$Q' = \frac{aC(2ce - a^2 - c^2)P + c(e-b)(2be - b^2 - c^2)P' + \frac{1}{4}ceC(e^2 + ce - c^2)G}{2c^2(e-c)^2}$$

$$Q'' = \frac{cB(3be - bc - ce - b^2)P' - aAC(c+a)P + \frac{1}{4}ceC(3e^2 - 5ce + c^2)G}{2ce(e-c)^2}.$$

Woraus folgt, daß der lothrechte Druck auf die einzelnen Unterſtützungen unabhängig von der Elaſticität oder Biegſamkeit des Balkens iſt, oder daß dieſer Druck unverändert bleibt, die Elaſticität des Balkens mag groß oder klein ſeyn. Auch läßt ſich hieraus die leichte Anwendung der gefundenen Ausdrücke zur Beſtimmung des Drucks auf die Unterlagen eines Balkens überſehen, weil dazu nichts weiter erfordert wird, als daß das Gewicht und die Länge des Balkens nebſt den Belaſtungen und ihren Entfernungen von den Unterlagen bekannt ſind, da die mehr oder mindere Biegſamkeit des Balkens auf die Beſtimmung des Drucks keinen Einfluß hat, auch ſelbſt dann nicht, wenn die Biegſamkeit noch ſo gering angenommen wird.

§. 124.

1. Zuſatz. Wird das Gewicht des Balkens bei Seite geſezt, und nur auf die Belaſtung durch die Gewichte P, P′ Rückſicht genommen, ſo iſt

$$Q = \frac{(c-a)(e-c)(2ce - ac - a^2)P + c(b-c)(e-b)(b+c-2e)P'}{2c^2e(e-c)}$$

$$Q' = \frac{a(e-c)(2ce - a^2 - c^2)P + c(e-b)(2be - b^2 - c^2)P'}{2c^2(e-c)^2}$$

$$Q'' = \frac{c(b-c)(3be - bc - ce - b^2)P' - a(a+c)(c-a)(e-c)P}{2ce(e-c)^2},$$

und wenn der Balken nur durch ſein eigenes Gewicht belaſtet wird, ſo erhält man

$$Q = \frac{c^2 + 3ce - e^2}{8c} G$$

$$Q' = \frac{e(e^2 + ce - c^2)}{8c(e-c)} G$$

$$Q'' = \frac{3e^2 - 5ce + c^2}{8(e-c)} G.$$

§. 125.

2. Zuſatz. In denjenigen Fällen, wo die mittlere Stütze bei B, Figur 45., von den beiden übrigen gleich weit abſteht, alſo AB = BC oder e = 2c iſt, erhält man

Taf. V. Fig. 45.

$$Q = \frac{(c-a)(4c^2 - ac - a^2)P - (b-c)(2c-b)(3c-b)P' + \frac{3}{2}c^4 G}{4c^3}$$

$$Q' = \frac{a(3c^2 - a^2)P + (2c-b)(4bc - b^2 - c^2)P' + \frac{5}{2}c^4 G}{2c^3}$$

$$Q'' = \frac{(b-c)(5bc - 2c^2 - b^2)P' - a(a+c)(c-a)P + \frac{3}{2}c^4 G}{4c^3}.$$

Sind die Gewichte in der Mitte zwiſchen den Stützen angebracht, und die Stützen gleich weit von einander entfernt, alſo AD = DB = BF = FC, oder c = 2a, b = 3a, e = 4a, ſo erhält man

$$Q = \frac{13P - 3P' + 6eG}{32}$$

$$Q' = \frac{11P + 11P' + 10eG}{16}$$

$$Q'' = \frac{13P' - 3P + 6eG}{32}.$$

Wäre die Laſt P ſo groß, wie das doppelte Gewicht des Balkens mit dem $4\frac{1}{3}$fachen der Laſt P' zuſammen genommen, ſo wird die dritte Stütze oder der Punkt C gar keinen Druck leiden, weil alsdann $Q'' = 0$ iſt. Und wenn $P > 4\frac{1}{3}P' + 2eG$ iſt, ſo wird der Druck auf C negativ, oder es wird noch eine Kraft erfordert, das Ende des Balkens bis zur Horizontale AC herunter zu biegen.

Werden die Belaſtungen in der Mitte von den gleich weit entfernten Stützen einander gleich geſetzt, ſo iſt $P = P'$, daher

$$Q = \frac{5P + 3eG}{16}$$

$$Q' = \frac{11P + 5eG}{8}$$

$$Q'' = \frac{5P + 3eG}{16}.$$

Wird unter den angeführten Umſtänden das Gewicht des Balkens bei Seite geſetzt, ſo iſt

$$Q = \tfrac{5}{16}P; \quad Q' = \tfrac{22}{16}P; \quad Q'' = \tfrac{5}{16}P;$$

oder wenn angenommen wird, daß keine Gewichte an dem Balken hängen, dagegen das Gewicht eG deſſelben $= 2P$ iſt, ſo wird

$$Q = \tfrac{6}{16}P; \quad Q' = \tfrac{20}{16}P; \quad Q'' = \tfrac{6}{16}P.$$

Woraus folgt, daß die in der Mitte zwiſchen den gleich weit entfernten Stützen aufgehängten gleichen Gewichte die mittlere Stütze ſtärker, und die äußere ſchwächer drücken, als wenn dieſe Laſt auf dem Balken gleichförmig verbreitet wäre. Im erſten Falle iſt der Druck auf die mittlere Stütze $4\frac{2}{5}$ mal ſo groß, als auf jede der äußern; dagegen iſt der Druck auf jene nur $3\frac{1}{3}$ mal ſo groß, als auf jede der letztern, wenn die Laſt auf dem Balken, wie Getreide auf Magazinböden, gleichförmig verbreitet iſt.

§. 126.

3. Zuſatz. Wenn bei drei gleich weit von einander angebrachten Unterſtützungen nur eine Laſt P zwiſchen den beiden erſten Stützen wirkt, und auf das Gewicht des

Balkens nicht Rückſicht genommen wird, alſo P' und $G = o$ ſind, ſo erhält man für $AB = BC$

$$Q = \frac{(c-a)(4c^2 - ac - a^2)}{4c^3} P$$

$$Q' = \frac{a(3c^2 - a^2)}{2c^3} P$$

$$Q'' = - \frac{a(c-a)(a+c)}{4c^3} P.$$

Es entſteht alſo auf die dritte Stütze kein Druck, ſondern es muß vielmehr eine Kraft $\frac{a(c-a)(a+c)}{4c^3} P$ angewandt werden, damit das Ende des Balkens bei C die Horizontale AC erreiche.

§. 127.

Aufgabe. Ein gleichförmig ſchwerer elaſtiſcher Balken AD, Figur 46., iſt in den vier Punkten A, B, C,
Taf. V. Fig. 46. D unterſtützt, und zwiſchen den Stützen mit Gewichten belaſtet, durch welche er nur wenig gebogen wird. Man ſucht den Druck auf jeden Unterſtützungspunkt, wenn vorausgeſetzt wird, daß die Laſt in $H = P$ der Laſt in L gleich, und daß $AE = DG$, $AF = FD$ und $AB = DC$ ſei.

a Auflöſung. Man ſetze $AE = DG = a$,
b c $AF = FD = b$, $AB = DC = c$. In der Mitte
P' R des Balkens hänge die Laſt P', und jeder Fuß von der
G Länge des Balkens wiege G Pfund. Die zum Punkte M des Bogens BR gehörigen Koordinaten ſetze man
x y $BP = x$, $PM = y$, und den Winkel, welchen die Tangente der krummen Linie mit der Horizontale AD im
ψ'' Punkte B bildet, $= \psi''$.

Q Q' Der Vertikaldruck auf A ſei Q, auf $B = Q'$, ſo iſt der Druck auf D ebenfalls $= Q$, und auf $C = Q'$, weil

auf der Seite FD ſämmtliche angebrachten Kräfte eben ſo wie auf der Seite FA wirken.

Ganz auf eine ähnliche Art wie §. 123. [VII] und [XIII] erhält man

$$E^2 \operatorname{tgt} \psi'' = \tfrac{1}{2}(c-a)^2 P + \tfrac{1}{6}(c-a)(a^2+ac+c^2)G - \tfrac{1}{2}(c-a)(c+a)Q + E^2 \operatorname{tgt} \psi$$

und

$$-cE^2 \operatorname{tgt} \psi = \tfrac{1}{6}(c-a)^3 P + \tfrac{1}{6}c(\tfrac{1}{4}c^3 - a^3)G + \tfrac{1}{2}c(a^2 - \tfrac{1}{3}c^2)Q,$$

oder wenn die erſte Gleichung mit 24c und die zweite mit — 24 multiplizirt, und aus der zweiten Gleichung der Werth von $24cE^2 \operatorname{tgt} \psi$ in die erſte Gleichung geſetzt wird, ſo erhält man

$$24cE^2 \operatorname{tgt} \psi'' = 4(a^3 - 3ac^2 + 2c^3)P + 3c^4 G - 8c^3 Q. \quad [I]$$

Für den Punkt M, Figur 46., findet man die Momente der Kräfte, oder

$$M = (c+x)Q + xQ' - (c-a+x)P - \tfrac{1}{2}(c+x)^2 G,$$

daher, weil §. 116. $\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x^2} = - M$ iſt,

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x^2} = (c-a+x)P + \tfrac{1}{2}(c+x)^2 G - (c+x)Q - xQ'.$$

Wird integrirt, ſo erhält man

$$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = x(c-a+\tfrac{1}{2}x)P + \tfrac{1}{2}x(c^2+cx+\tfrac{1}{3}x^2)G - x(c+\tfrac{1}{2}x)Q - \tfrac{1}{2}x^2 Q' + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt} \psi''$, alſo

Const. $= E^2 \operatorname{tgt} \psi''$, daher, wenn man durchgängig mit 24c multiplizirt,

$$\frac{24cE^2 \partial y}{\partial x} = 12cx(2c-2a+x)P + 4cx(3c^2+3cx+x^2)G - 12cx(2c+x)Q - 12cx^2 Q' + 24cE^2 \operatorname{tgt} \psi''.$$

Weil die Tangente im Punkte R mit der Horizontale AD

parallel, alſo $= 0$ iſt, ſo erhält man $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ für $x = b - c$, daher

$$0 = 4(3b^2c - 3c^3 - 6abc + 6ac^2)P + (4b^3c - 4c^4)G$$
$$-(12b^2c - 12c^3)Q - 12c(b-c)^2Q' + 24cE^2\,\mathrm{tgt}\,\psi''.$$

Setzt man in dieſe Gleichung aus [1] den Werth von $24cE^2\,\mathrm{tgt}\,\psi''$, ſo findet man

$$12(b^2c - 2bc^2 + c^3)Q' =$$
$$4(a^3 + 3b^2c - c^3 - 6abc + 3ac^2)P + (4b^3c - c^4)G - 4(3b^2c - c^3)Q.$$

Aus den Bedingungen für das Gleichgewicht folgt

$$Q' = P + \tfrac{1}{2}P' + bG - Q,$$

daher erhält man, wenn dieſer Ausdruck mit $12(b^2c - 2bc^2 + c^3)$ multiplizirt, von dem vorhergehenden abgezogen und daraus Q entwickelt wird, den Vertikaldruck auf A oder D,

$$Q = \frac{4(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 6c(b-c)^2P' + c(24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3)G}{8c^2(3b - 2c)}.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man aus der vorſtehenden Gleichung den Vertikaldruck auf B oder C,

$$Q' = \frac{4a(6bc - a^2 - 3c^2)P + 2c(3b^2 - c^2)P' + c(8b^3 + c^3 - 4bc^2)G}{8c^2(3b - 2c)}.$$

§. 128.

1. Zuſatz. Wird das Gewicht des Balkens bei Seite geſetzt, ſo erhält man

$$Q = \frac{2(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 3c(b-c)^2P'}{4c^2(3b - 2c)}$$
$$Q' = \frac{2a(6bc - a^2 - 3c^2)P + c(3b^2 - c^2)P'}{4c^2(3b - 2c)},$$

und wenn der Balken nur durch ſein eigenes Gewicht belaſtet wird, ſo iſt

$$Q = \frac{24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3}{8c(3b - 2c)}G$$
$$Q' = \frac{8b^3 + c^3 - 4bc^2}{8c(3b - 2c)}G.$$

§. 129.

2. Zuſatz. Sind ſämmtliche Gewichte in der Mitte zwiſchen den Stützen angebracht, ſo wird $c = 2a$, alſo

$$Q = \frac{a(12b - 19a)P - 3(b-2a)^2 P' + 4(6ab^2 - b^3 - 6a^2b - a^3)G}{8a(3b - 4a)}$$

$$Q' = \frac{a(12b - 13a)P + (3b^2 - 4a^2)P' + 4(a^3 - 2a^2b + b^3)G}{8a(3b - 4a)},$$

und wenn noch außerdem die Stützen gleich weit von einander abſtehen, ſo wird $b = 3a$, daher

$$Q = \frac{17P - 3P' + 32aG}{40}.$$

$$Q' = \frac{23P + 23P' + 88aG}{40}.$$

§. 130.

Die vorhergehenden Sätze über die Biegung der elaſtiſchen Ruthen oder Balken ſind unter der Vorausſetzung entwickelt, daß die Biegung nur wenig von der graden Linie abweiche. Allein ſie finden auch dann noch ihre Anwendung wenn die größte Ordinate nicht mehr als den zehnten Theil von der zugehörigen Abſciſſe beträgt, wie ſolches §. 141. bei der allgemeinen Unterſuchung über die Krümmung elaſtiſcher Ruthen erwieſen wird.

Weil die Sätze von dem Druck elaſtiſcher Ruthen oder Balken auf ihre Unterſtützungen auch dann noch gelten, wenn der Körper den kleinſt möglichen Grad von Biegſamkeit und Elaſticität beſitzt, und weil man feſte unbiegſame Körper ſo anſehn kann, als wenn ſolche nur unendlich wenig biegſam und elaſtiſch wären, ſo folgt hieraus, daß die erwieſenen Sätze von der Vertheilung des Drucks eines Balkens auf ſeine Unterſtützungen auch noch

gelten müſſen, wenn der Balken als ein feſter unbiegſamer Körper angeſehen wird.

§. 131.

Taf. V. Fig. 47. Aufgabe. Eine gleichförmig elaſtiſche Ruthe AMB, Figur 47., ſei bei B in dem horizontalen Boden BC ſo befeſtigt, daß ſie in ihrem natürlichen Zuſtande in die grade Linie BT′ fällt, und am andern Ende der Ruthe in A hänge ein Gewicht Q, deſſen Richtung die Horizontale BC in C ſchneidet; man ſoll die Geſtalt der Ruthe beſtimmen, vorausgeſetzt, daß ſolche nur ſehr wenig gebogen werde und nicht ſchwer ſei.

Auflöſung. Man nehme den Anfangspunkt der Abſciſſen im Aufhängepunkt A, ziehe für irgend einen Punkt M in der Kurve, MP auf AC ſenkrecht, und ſetze $AP = x$, $PM = y$, $BC = b$. Ferner ſollen MT, BT′, AT″ die Tangenten der Punkte M, B, A darſtellen, und man ſetze die Winkel $MTC = \varphi$, $T'BC = \alpha$, $AT''C = \beta$. Bezeichnet nun r den Krümmungshalbmeſſer für den Punkt M, ſo wird §. 112.

$$rM = E^2 \text{ oder } \frac{E^2}{M} = r. \quad \text{Es iſt aber auch}$$

$$r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y} \quad \text{folglich}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{E^2 \, \partial^2 y}{\partial x^2} = -M.$$

Nun iſt das Moment $M = yQ$; daher, wenn man dieſen Werth in die vorſtehende Gleichung ſetzt, mit ∂y multiplizirt und integrirt, ſo erhält man, weil ∂x conſtant iſt,

$$\frac{E^2}{\partial x^2} \int \partial y \, \partial^2 y = -Q \int y \, \partial y, \quad \text{oder}$$

$$\frac{E^2 \partial y^2}{2 \partial x^2} = \frac{-Q y^2}{2} + \text{Const.}$$

Aber $\partial y = \partial x \cot \varphi$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} = \cot \varphi$, alſo

$$\frac{E^2 \cot \varphi^2}{2} = \frac{-Q y^2}{2} + \text{Const.}$$

Für $y = b$ wird $\varphi = \alpha$, alſo $\frac{1}{2} E^2 \cot \alpha^2 + \frac{1}{2} b^2 Q = \text{Const}$ daher

$$\frac{E^2 \partial y^2}{\partial x^2} = (b^2 - y^2) Q + E^2 \cot \alpha^2 = E^2 \cot \varphi^2 \text{ [I]},$$

und hieraus

$$\partial x^2 = \frac{E^2 \partial y^2}{E^2 \cot \alpha^2 + b^2 Q - Q y^2},$$ oder, wenn man $E^2 \cot \alpha^2 + b^2 Q = A^2$ ſetzt,

$$\partial x = \frac{E \partial y}{\surd(A^2 - Q y^2)},$$ und wenn man integrirt (P. A. S. 134.)

(II) $x = \frac{E}{\surd Q} \text{Arc sin} \frac{y \surd Q}{A}$, oder $\frac{x \surd Q}{E} = \text{Arc sin} \frac{y \surd Q}{A}$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil x mit y zugleich verſchwindet.

Wäre $\psi = \text{Arc sin } z$, ſo iſt bekanntlich $z = \sin \psi$. Daher erhält man auch

(III) $\frac{y \surd Q}{A} = \sin \frac{x \surd Q}{E}$, oder $y = \frac{A}{\surd Q} \sin \frac{x \surd Q}{E}$.

Aus der Gleichung [I] erhält man ferner

(IV) $\cot \varphi^2 = \frac{b^2 - y^2}{E^2} Q + \cot \alpha^2$,

und weil für $y = 0$ der Winkel $\varphi = \beta$ wird, ſo iſt

(V) $\cot \beta^2 = \frac{b^2 Q}{E^2} + \cot \alpha^2$.

§. 132.

Setzt man voraus, daß die verlängerte Richtung der Kraft Q in den Punkt B fällt, wo die Ruthe be-

feſtigt iſt, ſo wird b = o, alſo A = E cot α, und man erhält für die Geſtalt der Ruthe folgende Gleichungen:

$$\text{(I)} \quad r = \frac{E^2}{yQ}$$

$$\text{(II)} \quad x = \frac{E}{\sqrt{Q}} \text{Arc} \sin \frac{y\sqrt{Q}}{E \cot \alpha}$$

$$\text{(III)} \quad y = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E}$$

$$\text{(IV)} \quad \cot \varphi^2 = \cot \alpha^2 - \frac{y^2 Q}{E^2}$$

$$\text{(V)} \quad \cot \beta = \cot \alpha.$$

Hieraus folgt, daß die Tangenten der krummen Linie, Taf. V. welche die Ruthe bildet, am Aufhängepunkte A, Figur 48., Fig. 48. und da, wo ſie befeſtigt iſt, bei B gleiche Winkel mit dem Horizonte einſchließen.

Wird y = o geſetzt, ſo erhält man diejenigen Punkte, in welchen die krumme Linie in die Axe AB fällt, oder ſolche durchſchneidet. Dies giebt (III)

$$o = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E}, \text{ oder } \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E} = o.$$

Nun iſt $\sin o = \sin \pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi \ldots = o$, oder $\sin n\pi = o$, wo n jede ganze Zahl oder Null ſeyn kann, daher

$$\sin \frac{x\sqrt{Q}}{E} = \sin n\pi, \text{ alſo } \frac{x\sqrt{Q}}{E} = n\pi, \text{ und}$$

man findet für jeden Durchſchnittspunkt der Axe die zugehörige Abſciſſe

$$x = \frac{n\pi E}{\sqrt{Q}}.$$

Behält n die erforderliche Bedeutung, ſo iſt für

n = o; der Abſtand von A oder x = o.

n = 1; der Abſtand AS = $\frac{\pi E}{\sqrt{Q}}$ = AS

$n = 2$; der Abſtand $AS' = \frac{2\pi E}{\sqrt{Q}} = 2 . AS$

$n = 3$; „ „ $AS'' = \frac{3\pi E}{\sqrt{Q}} = 3 . AS$ u. ſ. w.

Setzt man die ganze Länge $AB = a = n . AS$, ſo wird $a = \frac{n \pi E}{\sqrt{Q}}$, wo n die Anzahl der Biegungen bezeichnet. Macht die Kurve nur eine Biegung, wie Figur 49., ſo wird $n = 1$, und man erhält AB oder $a = \frac{\pi E}{\sqrt{Q}}$, und hieraus Taf. V. Fig. 49.

$$\text{(VI)} \quad Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}.$$

Es ſei FG, Figur 49., die größte Ordinate $= u$, und die zugehörige Abſciſſe $AF = a'$, ſo muß im Scheitel G die Tangente GD mit der Axe AB parallel ſeyn, daher iſt der Winkel $FGD = \varphi = 90$ Grad, alſo $\cot \varphi = \cot 90° = 0$. Wird nun in IV), u ſtatt y geſetzt, ſo erhält man $0 = \cot \alpha^2 - \frac{u^2 Q}{E^2}$, folglich die größte Ordinate

$$\text{(VII)} \quad u = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}}.$$

Setzt man in die Gleichung (III) a' ſtatt x und u ſtatt y, ſo wird

$$u = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E} = u \sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E} \text{ oder } 1 = \sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E}.$$

Aber $\sin \frac{1}{2} \pi = 1$, daher $\sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E} = \sin \frac{1}{2} \pi$, alſo $\frac{a' \sqrt{Q}}{E} = \frac{1}{2} \pi$ oder $a' = \frac{1}{2} \frac{\pi E}{\sqrt{Q}}$. Es iſt folglich (VI) $a' = \frac{1}{2} a$ oder $AF = \frac{1}{2} AB$, daher fällt die größte Ordinate in die Mitte F der Axe AB. Auch ſind alle Ordinaten wie $PM = y$ und $P'M' = y'$ einander gleich, wenn $FP = FP'$ oder $AP = BP'$ angenommen wird. Denn für $AP = x$ erhält man (III)

$$MP = y = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E},$$

und weil $AP' = a - x = \frac{\pi E}{\sqrt{Q}} - x$ iſt,

$$M'P' = y' = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \left(\pi - \frac{x\sqrt{Q}}{E}\right).$$

Nun iſt $\sin \frac{x\sqrt{Q}}{E} = \sin \left(\pi - \frac{x\sqrt{Q}}{E}\right)$, folglich $y = y'$.

Die beiden Schenkel G A und G B ſind daher einander gleich und ähnlich, oder A G B iſt gegen die Linie G F eine ſymmetriſche Kurve.

Weil $r = \frac{E^2}{y\,Q}$ und $\frac{a^2}{\pi^2} = \frac{E^2}{Q}$ iſt, ſo erhält man auch für den Krümmungshalbmeſſer

$$\text{(VIII)} \quad r = \frac{a^2}{\pi^2 y}.$$

Für $y = 0$ wird $r = \infty$, d. h. am Aufhängepunkte A und am Ende bei B geht die Krümmung der Ruthe in eine grade Linie über. Für den Scheitel G iſt $y = u = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}}$, daher findet man den Krümmungshalbmeſſer im Scheitel G

$$= \frac{a^2 \sqrt{Q}}{\pi^2 E \cot \alpha}.$$

Endlich erhält man aus (VI) und (VII)

$$\frac{\sqrt{Q}}{E} = \frac{\pi}{a} \text{ und } \cot \alpha = u \frac{\sqrt{Q}}{E}, \text{ daher}$$

$$\text{(IX)} \quad \cot \alpha = \frac{\pi u}{a}, \text{ oder auch}$$

$$\text{(X)} \quad u = \frac{a}{\pi} \cot \alpha.$$

§. 133.

Zuſatz. Denkt man ſich die Linie A M B, Figur 49., umgekehrt, ſo daß A auf den Boden geſtellt, und in B das Gewicht Q aufgehängt wird, ſo bleibt noch die Ge-

ſtalt der Kurve ungeändert, woraus folgt, daß zur Erhaltung des Gleichgewichts im Punkte B, Figur 49., nach der Richtung BA eine Kraft Q erforderlich iſt. Nimmt man daher das Gewicht Q ganz weg und verbindet die Punkte A und B mittelſt eines feſten Fadens AB, ſo muß die Ruthe AMB in allen Lagen im Gleichgewichte ſeyn, und der Faden AB wird alsdann mit einer Kraft

$$Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2} \text{ (VI) angeſpannt.}$$

Nun iſt bei einerlei Ruthe die größte Ordinate $u = \frac{a}{\pi} \cot \alpha$ lediglich von dem Winkel α abhängig, und die zur Erzeugung der größten Ordinate u erforderliche Kraft $Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}$ iſt eine beſtändige Größe, welche für verſchiedene Werthe von u unverändert bleibt; daher wird bei verſchiedenen Krümmungen der Ruthe einerlei Kraft erfordert dieſe Krümmungen zu erzeugen. Auch iſt

$$Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}$$

die kleinſte Kraft, welche die elaſtiſche Ruthe von der Länge a zu biegen im Stande iſt. Wäre Q kleiner als $\frac{\pi^2 E^2}{a^2}$, ſo kann ſich die Ruthe nicht biegen. Es verhält ſich daher bei einerlei E^2, die Laſt Q, welche eine elaſtiſche prismatiſche Ruthe oder Säule zu biegen im Stande iſt, umgekehrt wie das Quadrat von der Länge der Säule.

II. Allgemeinere Unterſuchung.

§. 134.

Aufgabe. An einer elaſtiſchen Ruthe AMB, Figur 50., welche in der Wand B′B″ bei B ſo befeſtigt iſt, daß ſie im natürlichen Zuſtande in die grade Linie BT fällt, iſt am Ende A ein Gewicht Q aufgehängt; man ſoll die Gleichung für die krumme Linie AMB finden, nach welcher die Ruthe gebogen wird.

Taf. V. Fig. 50.

Auflöſung. Zur Beſtimmung der Koordinaten nehme man in der krummen Linie AMB irgend einen Punkt M an, ziehe durch den Aufhängepunkt A die Linie AC ſenkrecht auf die Richtung AQ der Kraft Q, und ziehe BC und MP ſenkrecht auf AC. Ferner ſetze man
a x AC = a, AP = x, PM = y, den Bogen AM = v,
y v den Krümmungshalbmeſſer für den Punkt M = r, und
r wenn MT die zum Punkte M gehörige Tangente iſt, ſo ſetze man den Winkel, welchen die Tangente mit der ver-
ψ längerten Axe AC bildet, oder ATM = ψ. Auch ſei T′BT″ die Tangente im Punkte B, tAt′ im Punkte A,
α β und der Winkel BT″C = α, tAT = β. Nun iſt (§. 112.) $r = \frac{E^2}{xQ}$. Aber nach bekannten Lehren iſt auch $r = \frac{-\partial v^2}{\partial x \partial^2 y}$, wenn ∂x conſtant angenommen wird; man erhält daher aus der Verbindung beider Gleichungen den Krümmungshalbmeſſer

$$(\text{I})\quad r = \frac{E^2}{xQ} = \frac{-\partial v^2}{\partial x\, \partial^2 y}.$$

Hieraus

Hieraus wird

$xQ = \frac{-E^2\partial x\,\partial^2 y}{\partial v^3} = \frac{-E^2\partial x\,\partial^2 y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)^3}}$, oder mit $2\partial x$ multiplizirt und $\partial y = p\partial x$ geſetzt, giebt, weil ∂x conſtant iſt, $\partial^2 y = \partial p\,\partial x$ und $\partial x^2+\partial y^2 = \partial x^2(1+p^2)$, daher

$$2Qx\partial x = \frac{-2E^2\partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}.$$

Setzt man nun zur Erleichterung der Integration $\frac{1}{p^2}+1 = z^2$, ſo wird $\partial p = -p^3 z\partial z$ und $(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = p^3 z^3$, daher

$$\int\frac{\partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}},$$ alſo

$$\int 2Qx\partial x = x^2Q + \text{Const} = \frac{-2E^2\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}} = \frac{-2E^2\partial y}{\partial v}.$$

Nun iſt $\partial y = \partial v\sin\psi$, alſo $\frac{\partial y}{\partial v} = \sin\psi$, daher $x^2Q + \text{Const} = -2E^2\sin\psi$.

Für $x=a$ wird $\psi=\alpha$, alſo $\text{Const} = -a^2Q - 2E^2\sin\alpha$, folglich

$$x^2Q - a^2Q2 - E^2\sin\alpha = -2E^2\sin\psi = \frac{-2E^2\partial y}{\partial v} = \frac{-2E^2\partial y}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}$$

Hieraus findet man

$$\text{(II)}\quad \sin\psi = \frac{(a^2-x^2)Q}{2E^2} + \sin\alpha;$$

ferner $(a^2Q+2E^2\sin\alpha - x^2Q)\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)} = 2E^2\partial y$, oder, wenn man dieſen Ausdruck quadrirt, daraus ∂y^2 entwickelt, und die Quadratwurzel auszieht:

$$\text{(III)}\quad \partial y = \frac{(a^2Q+2E^2\sin\alpha - x^2Q)\partial x}{\sqrt{[4E^4-(a^2Q+2E^2\sin\alpha-x^2Q)^2]}}.$$

Setzt man $\frac{a^2Q+2E^2\sin\alpha}{Q} = A^2$ und $\frac{4E^4}{Q^2} = B^4$, ſo wird

$$\text{(IV)}\quad \partial y = \frac{(A^2-x^2)\partial x}{\sqrt{[B^4-(A^2-x^2)^2]}},$$

welches die allgemeine Gleichung für die elaſtiſche Linie iſt, wenn die Elaſticität der Ruthe auf ihre ganze Länge einerlei bleibt, und wenn man das Gewicht der Ruthe ſelbſt bei Seite ſetzt. Dieſer Ausdruck kann aber nicht anders als mittelſt Reihen integrirt werden.

Um einen Ausdruck für das Element des Bogens v zu erhalten, ſo iſt nach (II)

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \sin\psi = \frac{a^2 Q + 2E^2 \sin\alpha - x^2 Q}{2E^2} = \frac{A^2 - x^2}{B^2}, \text{ alſo}$$

$$\partial v = \frac{B^2}{A^2 - x^2}\,\partial y = \frac{B^2}{A^2 - x^2} \cdot \frac{(A^2 - x^2)\,\partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}},$$

oder (V) $\partial v = \dfrac{B^2\,\partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}}$.

§. 135.

1. Zuſatz. Aus der Gleichung $r x Q = E^2$ folgt, daß für einerlei Q und x der Krümmungshalbmeſſer r mit E^2 wächſt, daher wird die Ruthe unter übrigens gleichen Umſtänden deſto weniger gebogen, je größer E^2 iſt. Für $E^2 = \infty$ wird $r = \infty$, alſo bleibt in dieſem Falle die Ruthe grade.

Bei einerlei E^2 und Q wird r deſto kleiner, je größer x iſt; daher iſt die Ruthe für das größte x am meiſten gebogen, und die Biegung nimmt immer mehr ab, je kleiner x iſt.

Weil $r = \frac{E^2}{xQ}$ iſt, ſo wird für $x = 0$, $r = \infty$, oder in demjenigen Punkte, wo das Gewicht Q aufgehängt iſt, geht die Krümmung der Ruthe in eine grade Linie über.

§. 136.

2. Zuſatz. Wollte man den Winkel $CAt' = \beta$, Figur 50., finden, welchen die Tangente At' am Auf-

hängepunkte A mit der Axe AC einſchließt, ſo darf man nur in der Gleichung (II) β ſtatt ψ und $x = 0$ ſetzen, ſo erhält man

$$\sin\beta = \frac{a^2 Q}{2E^2} + \sin\alpha,$$

ſo daß einer von den Winkeln α, β gefunden werden kann, wenn der andere bekannt iſt.

§. 137.

3. Zuſatz. Diejenige Abſciſſe, welche zur größten Ordinate gehört, oder vielmehr, wo die Ordinate ein Größtes iſt, muß offenbar da liegen, wo die Tangente MT, Figur 50., mit der Axe AC parallel iſt, oder wo $\psi = 0$ wird. Alsdann iſt aber $\sin\psi = 0$, daher nach (II)

$$0 = \frac{a^2 - x^2}{2E^2} Q + \sin\alpha,$$

und man findet hieraus diejenige Abſciſſe, welche der größten Ordinate entſpricht, oder

$$x = \sqrt{\frac{a^2 Q + 2E^2 \sin\alpha}{Q}}.$$

§. 138.

Aufgabe. Aus der gegebenen Abſciſſe x die zugehörige Ordinate y mittelſt einer unendlichen Reihe zu finden.

Auflöſung. Weil $B^4 - (A^2 - x^2)^2$

$$= (B^2+A^2-x^2)(B^2-A^2+x^2) = (B^2+A^2)(B^2-A^2)\left(1-\frac{x^2}{B^2+A^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{B^2-A^2}\right),$$

ſo erhält man, wenn $\frac{B^2 - A^2}{B^2 + A^2} = f^2$ und

$x^2 = (B^2 - A^2) z^2$ geſetzt wird,

$$B^4 - (A^2 - x^2)^2 = (B^2 + A^2)(B^2 - A^2)(1 + z^2)(1 - f^2 z^2).$$

Aber $A^2 - x^2 = A^2 - (B^2 - A^2) z^2$ und $\partial x = \partial z \sqrt{(B^2 - A^2)}$, daher §. 134. IV.

$$\partial y = \frac{[A^2 - (B^2 - A^2) z^2] \partial z}{\sqrt{(B^2 + A^2)} \sqrt{(1 + z^2)} \sqrt{(1 - f^2 z^2)}}.$$

Wird $\frac{1}{\sqrt{(1 - f^2 z^2)}}$ nach dem binomiſchen Lehrſatze in eine Reihe aufgelöſt, ſo iſt:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - f^2 z^2)}} = 1 + \tfrac{1}{2} f z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} f^2 z^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} f^3 z^3 + \ldots.$$

und wenn man ſetzt:

$$\frac{A^2 - (B^2 - A^2) z^2}{\sqrt{(1 - f^2 z^2)}} = A' + B' f z + C' f^2 z^2 + D' f^3 z^3 + \ldots,$$

ſo findet man durch die Multiplikation der erſtern Reihe mit $A^2 - (B^2 - A^2) z^2$, wenn man bemerkt, daß $B^2 - A^2 = (B^2 + A^2) f^2$ iſt:

$$A' = A^2$$

$$B' = \tfrac{1}{2} A^2$$

$$C' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A^2 - (B^2 + A^2) = -\frac{5 A^2 + 8 B^2}{8}$$

$$D' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A^2 - \tfrac{1}{2} (B^2 + A^2) = -\frac{3 A^2 + 8 B^2}{8}$$

$$E' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} A^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (B^2 + A^2) = -\frac{13 A^2 + 48 B^2}{128}$$

$$F' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} A^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (B^2 + A^2) = -\frac{17 A^2 + 80 B^2}{256}$$

$$G' = -\frac{49 A^2 + 280 B^2}{1024}$$ u. ſ. w.

Nach P. A. S. 135. und 168. findet man

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = \text{logn} [z + \sqrt{(1 + z^2)}] + \text{Const.} = R,$$

wo Const. $= 0$ iſt, weil mit $z = 0$ das Integral verſchwindet.

$$\int \frac{z \partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = \sqrt{(1 + z^2)} + \text{Const.}$$ Für $z = 0$ verſchwindet das Integral, alſo wird Const. $= -1$.

$$\int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z\sqrt{(1+z^2)}}{2} - \tfrac{1}{2}R$$

$$\int \frac{z^3 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z^2-2}{3}\sqrt{(1+z^2)} + \text{Const, wo Const} = \tfrac{2}{3} \text{ iſt.}$$

$$\int \frac{z^4 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z^3\sqrt{(1+z^2)}}{4} - \frac{3z\sqrt{(1+z^2)}}{4.2} + \frac{3.1}{4.2}R$$

$$\int \frac{z^5 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{3z^4-4z^2+8}{15}\sqrt{(1+z^2)} + \text{Const.},$$ wo

Const. $= -\tfrac{8}{15}$ iſt.

$$\int \frac{z^6 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z^5\sqrt{(1+z^2)}}{6} - \frac{5z^3\sqrt{(1+z^2)}}{6.4} + \frac{5.3.z\sqrt{(1+z^2)}}{6.4.2} - \frac{5.3.1}{6.4.2}R$$

u. ſ. w. Es iſt aber

$$\partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{(B^2+A^2)}\sqrt{(1+z^2)}}[A' + B'fz + C'f^2z^2 + D'f^3z^3 + \ldots.],$$

daher

$$y = \frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\left[A'\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} + B'f\int\frac{z\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} + C'f^2\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} + \ldots.\right],$$

oder wenn man die gefundenen Integrale in dieſe Reihe ſetzt, und $\sqrt{(1+z^2)}$ durch W bezeichnet, ſo wird

$$y = \frac{1}{\sqrt{(B^2+A^2)}}\left\{\begin{array}{l} R\;\{A' - \tfrac{1}{2}C'f^2 + \tfrac{3}{8}E'f^4 - \tfrac{5}{16}G'f^6 + \tfrac{35}{128}I'f^8 - \ldots\} \\ (W-1)\{B'f - \tfrac{2}{3}D'f^3 + \tfrac{8}{15}F'f^5 - \tfrac{16}{35}H'f^7 + \ldots\ldots\} \\ W\left\{\begin{array}{l} fz\,\{\tfrac{1}{2}C'f - \tfrac{3}{8}E'f^3 + \tfrac{5}{16}G'f^5 - \ldots\ldots\} \\ f^2z^2\{\tfrac{1}{3}D'f - \tfrac{4}{15}F'f^3 + \tfrac{8}{35}H'f^5 - \ldots\ldots\} \\ f^3z^3\{\tfrac{1}{4}E'f - \tfrac{5}{24}G'f^3 + \ldots\ldots\ldots\} \\ f^4z^4\{\tfrac{1}{5}F'f - \ldots\ldots\ldots\ldots\} \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

u. ſ. w.

Da nun $f = \sqrt{\frac{B^2-A^2}{B^2+A^2}}$ und $z = \frac{x}{\sqrt{(B^2--B^2)}}$, alſo

$$fz = \frac{x}{\sqrt{(B^2+A^2)}},$$

und $\sqrt{(B^2+A^2)}$ allemal größer als x iſt, ſo folgt hieraus, daß die für y gefundene Reihe deſto mehr abnehmen

muß, je größer $\sqrt{(B^2 + A^2)}$ gegen x iſt, und je mehr Glieder derſelben in Rechnung gebracht werden.

Will man nur die zweite Potenz von f in Rechnung bringen, ſo wird

$$y = \frac{1}{\sqrt{(B^2+A^2)}}[(A' - \tfrac{1}{2}C'f^2)R + B'f(W-1) + \tfrac{1}{2}C'f^2 Wz],$$

oder

$$y = \frac{(21A^2 + B^2)R + 8A^2 f(W-1) - (5A^2+8B^2)f^2 Wz}{16\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

wo $z = \frac{x}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$

$$W = \sqrt{(1+z^2)} = \sqrt{\frac{A^2+B^2+x^2}{A^2+B^2}} \text{ und}$$

$$R = \text{logn}[z + \sqrt{(1+z^2)}]$$

$$= \text{logn}[x + \sqrt{(A^2+B^2+x^2)}] - \tfrac{1}{2}\text{logn}(A^2+B^2) \text{ iſt.}$$

§. 139.

1. Zuſatz. Wollte man ſtatt der für y gefundenen weitläuftigen Reihe einen kürzern Näherungsausdruck ſuchen, ſo könnte man folgendergeſtalt verfahren. Man verwandele die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2}fz + \tfrac{3}{8}f^2z^2 + \tfrac{5}{16}f^3z^3 + \tfrac{35}{128}f^4z^4 + \ldots$$

in einen Kettenbruch, ſo findet man als Näherungswerth

$$\frac{4-fz}{4-3fz} = 1 + \tfrac{1}{2}fz + \tfrac{3}{8}f^2z^2 + \tfrac{9}{32}f^3z^3 + \ldots.$$

Wird nun $\frac{4-fz}{4-3fz}$ ſtatt $\frac{1}{\sqrt{(1-f^2z^2)}}$ in die Differenzialgleichung des vorigen §. geſetzt, und zur Erleichterung der Integration der Werth $u = 4 - 3fz$ eingeführt, ſo erhält man, weil

$$z = \frac{4-u}{3f};\ \partial z = \frac{-\partial u}{3f};\ 1 + z^2 = \frac{9f^2 + 16 - 8u + u^2}{9f^2}$$

$$\text{alſo } \partial y = \frac{-[A^2 - (B^2 - A^2)\frac{(4-u)^2}{9f^2}](8+u)\partial u}{3u\sqrt{(B^2+A^2)}\sqrt{(9f^2+16-8u+u^2)}} \text{ iſt,}$$

und wenn man $9f^2 + 16 - 8u + u^2 = U$ ſetzt,

$$\partial y = \frac{\partial u}{27f^2 \sqrt{(B^2 + A^2)}} \left[-\frac{128(B^2 - A^2) - 72f^2A^2}{u\sqrt{U}} - \frac{48(B^2 - A^2) + 9f^2A^2}{\sqrt{U}} + \frac{(B^2 - A^2)u^2}{\sqrt{U}} \right]$$

Nun iſt (P. A. S. 142, 140 und 157.)

$$\int \frac{\partial u}{u\sqrt{U}} = \frac{-1}{\sqrt{(9f^2 + 16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2 + 16 - 4u + \sqrt{(9f^2 + 16)}\sqrt{U}}{u} + \text{Const.}$$

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{U}} = \operatorname{logn}[u - 4 + \sqrt{U}] + \text{Const.}$$

$$\int \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{U}} = \frac{12 + u}{2}\sqrt{U} + \frac{32 - 9f^2}{2} \operatorname{logn}[u - 4 + \sqrt{U}] + \text{Const.}$$

Hieraus erhält man nach gehöriger Zuſammenziehung:

$$y = \frac{1}{27f^2\sqrt{(B^2 + A^2)}} \left\{ \frac{128(B^2 - A^2) - 72f^2A^2}{\sqrt{(9f^2 + 16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2 + 16 - 4u + \sqrt{(9f^2 + 16)}\sqrt{U}}{u} \right.$$

$$\left. + \frac{(B^2 - A^2)(12 + u)}{2}\sqrt{U} - \frac{(9f^2 + 64)(B^2 - A^2) + 18f^2A^2}{2} \operatorname{logn}[u - 4 + \sqrt{U}] \right\}$$

$$+ \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $z = 0$; $u = 4$; $U = 9f^2$ und $y = 0$, daher

$$\text{Const} = \frac{1}{27f^2\sqrt{(B^2 + A^2)}} \left\{ \frac{72f^2 - 128(B^2 - A^2)}{\sqrt{(9f^2 + 16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2 + 3f\sqrt{(9f^2 + 16)}}{4} \right.$$

$$\left. - 24f(B^2 - A^2) + \frac{(9f^2 + 64)(B^2 - A^2) + 18f^2A^2}{2} \operatorname{logn} 3f \right\}$$

folglich, wenn man $\frac{B^2 - A^2}{B^2 + A^2}$ ſtatt f^2 ſetzt,

$$y =$$

$$\frac{1}{34} \left\{ \frac{16(16B^2 + 7A^2)}{\sqrt{(25B^2 + 7A^2)}} \operatorname{logn} \frac{25B^2 + 7A^2 - 4(B^2 + A^2)u + \sqrt{(B^2 + A^2)}\sqrt{(25B^2 + 7A^2)}\sqrt{U}}{\frac{1}{4}[9(B^2 - A^2) + 3\sqrt{(B^2 - A^2)}\sqrt{(25B^2 + 7A^2)}]u} \right.$$

$$+ \sqrt{(B^2 + A^2)}(12 + u)\sqrt{U} - 48\sqrt{(B^2 - A^2)}$$

$$\left. + 73\sqrt{(B^2 + A^2)} \operatorname{logn} \frac{3\sqrt{(B^2 - A^2)}}{\sqrt{(B^2 + A^2)}(u - 4 + \sqrt{U})} \right\}$$

wo $u = 4 - 3fz = 4 - \frac{3x}{\sqrt{(B^2 + A^2)}}$ iſt.

§. 140.

2. Zuſatz. Will man nach den Entwickelungen des vorigen §. die Länge des Bogens $AM = v$ beſtimmen, ſo iſt nach §. 134. und 138.

$$\partial v = \frac{B^2 \partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}} = \frac{B^2 \partial z}{\sqrt{(B^2 + A^2)}\sqrt{(1 + z^2)}\sqrt{(1 - f^2 z^2)}}$$

$$= \frac{B^2 (4 - fz)\,\partial z}{\sqrt{(B^2 + A^2)}\sqrt{(1 + z^2)}\,(4 - 3fz)}$$

folglich, wenn $4 - 3fz = u$ geſetzt wird,

$$\partial v = \frac{-B^2}{9f\sqrt{(B^2 + A^2)}}\left[\frac{8\,\partial u}{u\sqrt{U}} + \frac{\partial u}{\sqrt{U}}\right],$$ folglich

$$v = \frac{B^2}{9f\sqrt{(B^2 + A^2)}}\left\{\frac{8}{\sqrt{(9f^2 + 16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2 + 16 - 4u + \sqrt{(9f^2 + 16)}\sqrt{U}}{u} - \operatorname{logn}[u - 4 + \sqrt{U}]\right\} + \text{Const.}$$

$$\text{Const} = \frac{-B^2}{9f\sqrt{(B^2 + A^2)}}\left\{\frac{8}{\sqrt{(9f^2 + 16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2 + 3f\sqrt{(9f^2 + 16)}}{4} - \operatorname{logn} 3f\right\}$$

folglich

$$v = \frac{B^2}{9f\sqrt{(B^2 + A^2)}}\left\{\frac{8}{\sqrt{(9f^2 + 16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2 + 16 - 4u + \sqrt{(9f^2 + 16)}\sqrt{U}}{\frac{1}{4}[9f^2 + 3f\sqrt{(9f^2 + 16)}]u} - \operatorname{logn} \frac{u - 4 + \sqrt{U}}{3f}\right\}.$$

§. 141.

Wenn die Abſciſſe x gegen die Ordinate y ſehr groß iſt, ſo kann man ſich zu Beſtimmung der Ordinate des §. 119. (III) gefundenen Ausdrucks bedienen, nach welchem

$$\text{(I)} \quad y = \frac{Q}{6E^2}(3a^2 x - x^3)$$

iſt. Auch erhält man alsdann die größte Ordinate

$$\text{(II)} \quad u = \frac{a^3 Q}{3E^2}.$$

Um ungefähr zu überſehen innerhalb welcher Grenzen dieſe Ausdrücke noch mit zureichender Genauigkeit angewandt werden können, beſtimme man hieraus die Lage der Tangente für die Abſciſſe x. Nun iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt} \psi$. Aber aus (I) wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Q}{2E^2}(a^2 - x^2)$, daher

(III) $\text{tgt}\,\psi = \frac{a^2 - x^2}{2E^2} Q$ und $\text{tgt}\,\beta = \frac{a^2 Q}{2 E^2} = \frac{3 u}{2 a}$.

Da nun die krumme Linie, welche der Gleichung (I) entſpricht, für jeden Werth von x einen Krümmungshalbmeſſer $r = \frac{E^2}{x Q}$ hat (§. 112.), ſo folgt hieraus, daß dieſe krumme Linie für jeden Werth von x eben ſo gekrümmt iſt, wie diejenige Kurve, welche durch die allgemeine Gleichung §. 134. (III) erhalten wird. Nun iſt ferner für die Kurve, §. 134., wenn die Wand in welcher die Ruthe befeſtigt iſt vertikal angenommen wird, $\alpha = 0$, daher §. 134. (II)

$$\sin\psi = \frac{a^2 - x^2}{2 E^2} Q,$$

folglich können beide krumme Linien als einerlei angeſehen werden, ſo weit man berechtigt iſt $\text{tgt}\,\psi$ mit $\sin\psi$ als einerlei anzunehmen. Für einen Winkel von 9 Grad iſt $\sin\psi = 0{,}1564345$ und $\text{tgt}\,\psi = 0{,}1583844$, alſo der Unterſchied zwiſchen beiden 0,0019499, welcher in den meiſten Fällen als unerheblich angeſehen werden kann. Beſtimmt man daher die Grenze, innerhalb welcher die Gleichung (I) noch mit Sicherheit angewandt werden ſoll, daß alsdann ψ, oder vielmehr β, nicht größer als 9 Grad iſt, ſo erhält man

$$\frac{3 u}{2 a} = \text{tgt}\,\beta = 0{,}1583844,$$

alſo wird der größte Ordinate

$$u = 0{,}1055896 \,.\, a.$$

So lange daher bei einer elaſtiſchen Ruthe die größte Ordinate u nicht größer als der zehnte Theil von der zugehörigen Abſciſſe a wird, kann man ſich zur Beſtimmung der Natur der elaſti-

ſchen Linie, des vorſtehenden Ausdrucks (I) mit Sicherheit bedienen.

§. 142.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche zu finden, welche von der elaſtiſchen Linie und ihren Koordinaten eingeſchloſſen wird.

Taf. V. Fig. 50. Auflöſung. Wenn F' den Inhalt der Fläche APM, Figur 50., bezeichnet, ſo iſt das Element derſelben $\partial F' = y\,\partial x$, alſo $F' = \int y\,\partial x = xy - \int x\,\partial y$. Nach §. 134. (IV) iſt aber

$$x\,\partial y = \frac{(A^2 - x^2)\,x\,\partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}}.$$

Daher wird, wenn man $B^4 - (A^2 - x^2)^2 = z^4$ ſetzt, $(A^2 - x^2)\,x\,\partial x = z^3\,\partial z$, alſo

$$\int x\,\partial y = \int z\,\partial z = \tfrac{1}{2} z^2 + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $z^2 = \sqrt{(B^4 - A^4)}$ und das Integral verſchwindet, daher iſt $\text{Const} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(B^4 - A^4)}$, alſo $\int x\,\partial y = \tfrac{1}{2}\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^4 - A^4)}$, folglich die geſuchte Fläche

$$F' = xy - \tfrac{1}{2}\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^4 - A^4)}.$$

§. 143.

Fig. 41. Wäre die Richtung der Kraft Q auf die urſprüngliche Richtung A T′ der elaſtiſchen Ruthe ſenkrecht, wie Figur 41., ſo iſt der Winkel $\alpha = 0$, alſo $\sin \alpha = 0$, daher erhält man nach dem Vorhergehenden, weil $A^2 = a^2$ wird,

$$\text{(I)} \quad \sin\psi = \frac{a^2 - x^2}{2E^2}\,Q.$$

$$\text{(II)} \quad \partial y = \frac{(a^2 - x^2)\,\partial x}{\sqrt{[B^4 - (a^2 - x^2)^2]}}.$$

(III) $\partial v = \frac{B^2 \partial x}{\sqrt{[B^4 - (a^2 - x^2)^2]}}$, wo $B^2 = \frac{2 E^2}{Q}$ iſt.

(IV) $\sin \beta = \frac{a^2 Q}{2 E^2}$.

Wäre ϱ der Krümmungshalbmeſſer im Scheitel bei B, ſo erhält man §. 134. (I) weil $r = \frac{E^2}{x Q}$ iſt,

(V) $\varrho = \frac{E^2}{a Q}$.

Mit Hülfe der Entwickelungen §. 138. bis 140. läßt ſich, wenn x gegeben iſt, die Ordinate y und der zugehörige Bogen v finden.

§. 144.

Unter der Vorausſetzung im vorigen §. findet man die Fläche A P M = F′ nach §. 142.

$$F' = x y - \tfrac{1}{2} \sqrt{[B^4 - (a^2 - x^2)^2]} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(B^4 - a^4)}.$$

Für x = A C = a werde y = B C = u und die Fläche A B C = F, ſo erhält man

$$F = a u - \tfrac{1}{2} B^2 + \tfrac{1}{2} \sqrt{(B^4 - a^4)}.$$

§. 145.

Fällt die Linie A C, Figur 50., welche durch den Aufhängepunkt A ſenkrecht auf die Richtung der Kraft Q gezogen iſt, unterhalb der Kurve A M B, ſo ſind alle Ordinaten wie P M poſitiv; wenn hingegen ein Theil der Kurve unterhalb der Linie A C fällt, ſo ſind die dazu gehörigen Ordinaten negativ. Liegt die ganze Kurve unterhalb A C, wie Figur 51., ſo ſind alle Ordinaten wie P M negativ. Für dieſen Fall kann man zu mehrerer Bequemlichkeit die bisherige Beziehung abändern. Taf. V. Fig. 50.

Es ſei daher A M B, Figur 51., eine elaſtiſche Linie, die durchgängig unterhalb derjenigen Linie A C fällt, welche Fig. 51.

durch den Aufhängepunkt A ſenkrecht auf die Richtung der Kraft Q gezogen iſt. Für irgend einen Punkt M und für B ſei MK und BC′ ſenkrecht auf der Richtung AQ, welche als Abſciſſenaxe angenommen wird. Man ſetze
x AK = x, KM = y, BC′ = b, und wenn für die
y b Punkte M, B, A die Linien MT, BT′, At′ die Tangenten ſind, ſo ziehe man BC ſenkrecht auf AC und ſetze
φ α die Winkel MTC′ = φ, T′BC′ = α, t′AC = β, ſo
β erhält man ganz auf eine ähnliche Art wie §. 134., weil hier das Moment der Laſt = MK . Q = yQ iſt

$$\text{(I)} \quad r = \frac{E^2}{yQ} = \frac{\partial v^3}{\partial y \, \partial^2 x},$$

wo ∂y conſtant genommen wird. Daher

$yQ = \frac{E^2 \partial y \partial^2 x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)^3}}$, oder mit $2\partial y$ multiplizirt, und weil y eine Funktion von x iſt, $\partial x = q \partial y$ geſetzt, giebt wie §. 134.

$2Qy\partial y = \frac{2E^2 \partial q}{\sqrt{(1 + q^2)^3}}$. Es iſt aber

$\int \frac{\partial q}{\sqrt{(1 + q^2)^3}} = \frac{q}{\sqrt{(1 + q^2)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$, oder

$\int 2Qy\partial y = y^2 Q + \text{Const} = \frac{2E^2 \partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{2E^2 \partial x}{\partial v}$

Ferner iſt $\partial x = \partial v \sin \varphi$, alſo $\frac{\partial x}{\partial v} = \sin \varphi$, daher

$y^2 Q + \text{Const} = 2E^2 \sin \varphi$. Für $y = b$ wird $\varphi = \alpha$, alſo $\text{Const} = -b^2 Q + 2E^2 \sin \alpha$, oder

$y^2 Q - b^2 Q + 2E^2 \sin \alpha = 2E^2 \sin \varphi = \frac{2E^2 \partial x}{\partial v} = \frac{2E^2 \partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$

folglich

$$\text{(II)} \quad \sin \varphi = \sin \alpha - \frac{(b^2 - y^2)Q}{2E^2}.$$

Weil $(y^2 Q - b^2 Q + 2E^2 \sin \alpha) \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 2E^2 \partial x$ iſt, ſo wird wie §. 134.

$$\partial x = \frac{(y^2 Q - b^2 Q + 2 E^2 \sin\alpha)\,\partial y}{\sqrt{[4E^4 - (y^2 Q - b^2 Q + 2 E^2 \sin\alpha)^2]}}, \text{ oder}$$

$\frac{2 E^2 \sin\alpha - b^2 Q}{Q} = A^2$ und $\frac{4 E^4}{Q^2} = B^4$ geſetzt, ſo wird

$$\text{(III)} \quad \partial x = \frac{(A^2 + y^2)\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}.$$

$$\text{(IV)} \quad \partial v = \frac{B^2\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}.$$

$$\text{(V)} \quad \sin\beta = \sin\alpha - \frac{b^2 Q}{2 E^2}.$$

§. 146.

Iſt die Richtung der Kraft Q mit der urſprünglichen Richtung B T', Figur 51., der elaſtiſchen Ruthe parallel, ſo daß B T' in B C fällt, ſo iſt $\alpha = 90$ Grad, alſo $\sin\alpha = 1$, daher Taf. V. Fig. 51.

$$\text{(I)} \quad \sin\varphi = \frac{2 E^2 - (b^2 - y^2) Q}{2 E^2},$$

$$\text{(II)} \quad A^2 = \frac{b^2 Q - 2 E^2}{Q}, \text{ und}$$

$$\text{(III)} \quad \sin\beta = \frac{2 E^2 - b^2 Q}{2 E^2}.$$

§. 147.

Wenn hingegen die verlängerte Richtung der Kraft Q in den Punkt B fällt, wo die elaſtiſche Ruthe befeſtigt iſt, wie Figur 49., ſo wird $b = 0$, Fig. 49 daher §. 145. $A^2 = \frac{2 E^2 \sin\alpha}{Q}$ und $B^2 = \frac{2 E^2}{Q}$, alſo

$$\text{(I)} \quad r = \frac{E^2}{y Q}.$$

$$\text{(II)} \quad \sin\varphi = \sin\alpha + \frac{y^2 Q}{2 E^2}.$$

$$\text{(III)} \quad \partial x = \frac{(A^2 + y^2)\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}.$$

$$\text{(IV)} \quad \partial v = \frac{B^2\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}.$$

$$\text{(V)} \quad \sin\beta = \sin\alpha.$$

Nimmt man die Richtung der Kraft Q vertikal an, ſo folgt aus (V) daß die Tangente A t′ im Aufhängepunkt eben die Neigung gegen den Horizont hat, wie die urſprüngliche Richtung der Ruthe.

Für $\phi = 90$ Grad läuft die Tangente MT mit der Axe AB parallel und entſpricht der größten Ordinate. Setzt man daher $\sin\phi = \sin 90° = 1$, ſo erhält man aus (II) $1 = \sin\alpha + \frac{y^2 Q}{2 E^2}$, alſo $y^2 Q = 2 E^2 - 2 E^2 \sin\alpha$, oder wenn FG = c die größte Ordinate bezeichnet

$$\text{(VI)} \quad FG = c = \pm \sqrt{\frac{2 E^2 - 2 E^2 \sin\alpha}{Q}}, \text{ oder}$$

$$c^2 = B^2 - A^2.$$

Man ziehe MM′ mit AB parallel, und M′P′ auf AB ſenkrecht, ſo iſt M′P′ = MP = y, daher nach (I) der Schenkel GB bei M′ eben ſo gekrümmt, wie der Schenkel GA bei M. Da ſich dies für jeden andern Punkt M′ eben ſo beweiſen läßt, ſo folgt daraus, daß beide Schenkel GB und GA für gleiche Ordinaten y auch gleiche Krümmung haben. Eben ſo findet man aus (II), weil P′M′ = PM = y iſt, daß die zum Punkte M′ gehörige Tangente, gleiche Neigung mit derjenigen hat, welche zum Punkte M gehört; da nun dies eben ſo für alle zuſammengehörige Punkte M′, M, der Schenkel GB, GA gilt, ſo folgt daraus, daß beide einander gleich und ähnlich ſind. Es iſt daher auch FA = FB, alſo $AF = \frac{1}{2} AB$, oder wenn man AB = a ſetzt, ſo iſt die zur größten Ordinate FG = c gehörige Abſciſſe $AF = \frac{1}{2} a$, daher muß auch die größte Ordinate c jedesmal in die Mitte der Axe AB = a fallen.

§. 148.

Der allgemeine Ausdruck §. 138. kann ebenfalls dazu dienen, aus der Gleichung (III) des vorigen §. für jeden gegebenen Werth von y, die dazu gehörige Abſciſſe x zu erhalten. Will man nur allein für die größte Ordinate $FG = c$ die zugehörige Abſciſſe $AF = \frac{1}{2}a$ finden, ſo kann man durch nachſtehendes Verfahren zu einem einfacheren Ausdruck zwiſchen a und c gelangen. Es iſt

$$\partial x = \frac{(A^2+y^2)\,\partial y}{\sqrt{[B^4-(A^2+y^2)^2]}} = \frac{(A^2+y^2)\,\partial y}{\sqrt{(B^2-A^2-y^2)}\,\sqrt{(B^2+A^2+y^2)}}$$

Man ſetze $B^2 - A^2 - y^2 = z^2$, ſo iſt $y^2 = B^2 - A^2 - z^2$, alſo $A^2 + y^2 = B^2 - z^2$ und $B^2 + A^2 + y^2 = 2B^2 - z^2$, daher

$$\partial x = \frac{(B^2 - z^2)\,\partial y}{z\sqrt{(2B^2 - z^2)}}.$$

Wird $\frac{1}{\sqrt{(2B^2 - z^2)}}$ nach dem binomiſchen Lehrſatze in eine Reihe aufgelößt, ſo erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{(2B^2-z^2)}} = \frac{1}{B\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2B^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^4}{4B^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^6}{8B^6} + \ldots\right] \text{ alſo}$$

$$\frac{1}{z\sqrt{(2B^2-z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{zB} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{2B^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^3}{4B^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^5}{8B^7} + \ldots\right]$$

oder mit $B^2 - z^2$ multiplizirt, giebt

$$\frac{B^2 - z^2}{z\sqrt{(2B^2 - z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l} \frac{B}{z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2B} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^3}{4B^3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^5}{8B^5} + \ldots \\ -\ \frac{z}{B} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{2B^3} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^5}{4B^5} - \ldots \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{B}{z} - \frac{3}{2}\,\frac{z}{2B} - \frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{z^3}{4B^3} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{7}{6}\,\frac{z^5}{8B^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{9}{8}\,\frac{z^7}{16B^7} - \ldots\right]$$

Nach §. 147. (VI) iſt $B^2 - A^2 = c^2$, alſo $z^2 = c^2 - y^2$. Aber P. A. S. 134.

$\int\frac{\partial y}{z} = \int\frac{\partial y}{\sqrt{(c^2 - y^2)}} = \text{Arc sin}\,\frac{y}{c}$, wo keine Conſtante hinzukommt, weil das Integral für $y = 0$ ver-

ſchwindet. Für $y = c$ wird

$$\text{Arc}\sin\frac{y}{c} = \text{Arc}\sin 1 = \tfrac{1}{2}\pi,$$ alſo

$$\int\frac{\partial y}{z} = \tfrac{1}{2}\pi.$$ Auf gleiche Art findet man

$$\int z\partial y = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi c^2$$

$$\int z^3\partial y = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{2}\pi c^4$$

$$\int z^5\partial y = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{2}\pi c^6$$ u. ſ. w. Nun iſt

$$\int\frac{(B^2 - z^2)\partial y}{z\sqrt{(2B^2 - z^2)}} = \int\frac{\partial y}{\sqrt{2}}\left[\frac{B}{z} - \frac{3}{2}\frac{z}{2B} - \frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{z^3}{4B^3} - \ldots\right]$$

Wird nun dies Integral ſo genommen, daß $y = c$ wird, ſo erhält man $\int\partial x = \tfrac{1}{2}a$, folglich iſt, wenn die für $\int\frac{\partial y}{z}, \int z\partial y\ldots$ gefundenen Werthe in die vorſtehende Reihe geſetzt werden,

$$\tfrac{1}{2}a = \frac{\pi B}{2\sqrt{2}}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{c^2}{2B^2} - \frac{1.5}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\frac{c^4}{4B^4} - \frac{1.3.7}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{c^6}{8B^6} - \ldots\right]$$

oder man findet die zur größten Ordinate c gehörige doppelte Abſciſſe

$$a = \frac{\pi B}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2}\frac{c^2}{B^2} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}\cdot\frac{5}{4}\frac{c^4}{B^4} - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{7}{8}\frac{c^6}{B^6} - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}\cdot\frac{9}{16}\frac{c^8}{B^8} - \ldots\right]$$

oder auch

$$a = \frac{\pi B}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{3}{8}\frac{c^2}{B^2} - \frac{15}{256}\frac{c^4}{B^4} - \frac{35}{2048}\frac{c^6}{B^6} - \ldots\right]$$

Je größer nun B gegen c iſt, deſto genauer kann auch mittelſt dieſer Reihe der Werth a gefunden werden.

§. 149.

Wollte man, wenn a, c und Q gegeben ſind, daraus den Werth für die beſtändige Größe E^2 durch Näherung unter der Vorausſetzung finden, daß die erſten drei bis vier Glieder der für a gefundenen Reihe einen zureichend genauen

genauen Werth geben, wenn die übrigen Glieder dieſer Reihe nicht genau in Rechnung gebracht werden, ſo kann man

$$1 - \frac{3}{8}\frac{c^2}{B^2} - \frac{15}{256}\frac{c^4}{B^4} - \frac{35}{2048}\frac{c^6}{B^6} - \ldots$$

in einen Kettenbruch auflöſen, ſo findet man als Näherungswerth für dieſe Reihe

$$\frac{32B^2 - 17c^2}{32B^2 - 5c^2} = 1 - \frac{3}{8}\frac{c^2}{B^2} - \frac{15}{256}\frac{c^4}{B^4} - \frac{75}{8192}\frac{c^6}{B^6} - \ldots$$

folglich wird

$$a = \frac{\pi B}{\sqrt{2}} \cdot \frac{32B^2 - 17c^2}{32B^2 - 5c^2}.$$

Nun iſt §. 147. $B = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{Q}}$. Dieſen Werth in die vorſtehende Gleichung geſetzt und nach den Potenzen von E geordnet, giebt

$$E^3 - \frac{a\sqrt{Q}}{\pi}E^2 - \frac{17c^2Q}{64}E + \frac{5ac^2Q\sqrt{Q}}{64\pi} = 0,$$

ſo daß man durch Auflöſung dieſer kubiſchen Gleichung den Werth für E finden kann.

Iſt c gegen a ſehr klein, ſo findet man nach §. 132. $E = \frac{a\sqrt{Q}}{\pi}$, und unter dieſer Vorausſetzung iſt $\frac{a\sqrt{Q}}{\pi}$ ein ſehr naher Werth für E. Wenn nun in einer kubiſchen Gleichung $t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$, y ein naher Werth für t iſt, ſo erhält man (P. A. 1. Bd. S. 382.) nahe genug

$$t = \frac{2y^3 + \alpha y^2 - \gamma}{3y^2 + 2\alpha y + \beta}.$$

Hienach findet man

$$E = \frac{a(64a^2 - 5\pi^2c^2)\sqrt{Q}}{\pi(64a^2 - 17\pi^2c^2)} \text{ oder}$$

$$E^2 = \frac{a^2(64a^2 - 5\pi^2c^2)^2 Q}{\pi^2(64a^2 - 17\pi^2c^2)^2}.$$

§. 150.

Mit Hülfe der Entwickelungen §. 148. kann ebenfalls die ganze Länge A G B, Figur 49., von der krummen Linie mittelſt einer Reihe gefunden werden, wenn $AB = a$, $FG = c$ und die Kraft Q bekannt iſt. Denn nach §. 147. (IV) iſt der Bogen A M, oder

$$v = \int \frac{B^2 \partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}} = \int \frac{B^2 \partial y}{z \sqrt{(2B^2 - z^2)}}.$$

Man ſetze den ganzen Bogen $AGB = V$, alſo den halben oder $AG = \frac{1}{2} V$. Wird nun für den Fall integrirt, daß $y = c$ wird, ſo muß $v = \frac{1}{2} V$ werden. Alsdann iſt aber §. 148.

$$\frac{B^2}{z\sqrt{(2B^2 - z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{B}{z} + \frac{1}{2}\frac{z}{2B} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{z^3}{4B^3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{z^5}{8B^5} + \ldots\right]$$

$$\int \frac{\partial y}{z} = \frac{1}{2}\pi;\ \int z \partial y = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\pi c^2;\ \int z^3 \partial y = \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{2}\pi c^4;$$ u. ſ. w.

Daher iſt, wenn dieſe Werthe in die vorſtehende Reihe geſetzt werden,

$$\frac{1}{2}V = \frac{\pi B}{2\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}.\frac{c^2}{2B^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{c^4}{4B^4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{c^6}{8B^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.\frac{c^8}{16B^8} + \ldots\right]$$

oder auch

$$V = \frac{\pi B}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{8}\frac{c^2}{B^2} + \frac{9}{256}\frac{c^4}{B^4} + \frac{25}{2048}\frac{c^6}{B^6} + \frac{1225}{262144}\frac{c^8}{B^8} + \ldots\right]$$

Für dieſe Reihe iſt

$$\frac{32B^2 - 5c^2}{32B^2 - 9c^2} = 1 + \frac{1}{8}\frac{c^2}{B^2} + \frac{9}{256}\frac{c^4}{B^4} + \frac{81}{8192}\frac{c^6}{B^6} + \ldots$$

ein Näherungswerth, daher erhält man beinahe

$$V = \frac{\pi B}{\sqrt{2}} . \frac{32B^2 - 5c^2}{32B^2 - 9c^2}.$$

§. 151.

Die erſte Veranlaſſung zur Unterſuchung der elaſtiſchen Linie gab Galilei in der bereits angeführten Schrift: Discorsi e Demonstrazioni matematiche etc., nur

hatte er die Meinung, daß die elaſtiſche Linie eine Parabel ſei. Jacob Bernoulli war es vorbehalten, die Eigenſchaften der elaſtiſchen Linie genauer zu beſtimmen. Hieher gehören folgende Abhandlungen deſſelben:

Curvatura Laminae Elasticae. Acta Erud. Lips. 1694: Jun. p. 262. (Jac. Bern. Opera. T. I. Genevae 1744. p. 576.)

Explicationes, Annotationes et Additiones. Acta Erud. Lips. 1695. Dec. p. 537. (J. B. Oper. T. I. p. 639.)

Elf Jahre ſpäter verbeſſerte Jacob Bernoulli ſeine frühern Abhandlungen, indem er zugleich ſeine Grundſätze über den Widerſtand feſter Körper bekannt machte. Der Aufſatz führt den Titel:

Véritable hypothèse de la résistance des Solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui ſont ressort. Mém. de l'acad. de Paris, année 1705. p. 230. éd. Bat. (J. B. Opera, T. II. p. 976.).

Die vollſtändigſten Unterſuchungen über die Eigenſchaften der elaſtiſchen Linien verdankt man L. Euler. Unter mehrern Abhandlungen deſſelben können vorzüglich folgende hieher gerechnet werden:

Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes. Auct. Leonh. *Eulero*. Lausannae et Genevae 1744. — Additamentum I. De Curvis Elasticis. p. 245—310.

L. *Euler* solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata. Comment. Acad. Petropol. Tom. III. ad An. 1728.

L. Euler Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum. Novi Comment. Ac. Petrop. Tom. XV. pro Anno 1770. p. 381 — 413.

——— De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi et utriusque egregio consensu. Novi Comment. Ac. Petropol. Tom. XX. pro Anno 1775. p. 286 — 303.

Nachtrag,

welcher einige Näherungsausdrücke für trigonometriſche Linien enthält.

§. 152.

Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für den Sinus zu finden, welcher einem gegebenen Kreisbogen entſpricht.

Auflöſung. Der Sinus, welcher für den Halbmeſſer = 1 einem gegebenen Kreisbogen φ zugehört, ſei = x, alſo x = sin Arc φ, oder kürzer x = sin φ, ſo iſt, wenn φ in sin φ den Winkel bezeichnet, welcher zum Bogen φ gehört, und wenn φ als Faktor vorkommt, einen Bogen für den Halbmeſſer 1 (P. A. 1. Bd. S. 539.)

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.\ldots.7} + \ldots \text{ oder}$$

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \frac{\varphi^7}{5040} + \frac{\varphi^9}{362880} - \ldots$$

Verwandelt man dieſe Reihe in einen Kettenbruch, ſo wird

$$\sin\varphi = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{10}{7\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{686}{11\varphi} + \ldots}}}}$$

und man erhält hieraus als Näherungswerthe

$$\text{(I)}\quad \sin\varphi = \frac{6\varphi}{6+\varphi^2}$$

$$\text{(II)}\quad \sin\varphi = \frac{(60-7\varphi^2)\varphi}{60+3\varphi^2}$$

u. ſ. w., wo jeder folgende Ausdruck den Werth für x genauer, aber auch mittelſt einer weitläuftigeren Formel angiebt. Je kleiner φ iſt, deſto genauer findet man x; auch laſſen ſich die vorſtehenden beiden Ausdrücke nur innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und Winkel $\varphi = 90$ Grad gebrauchen, weil für größere Winkel anſehnliche Abweichungen entſtehen. Für den Winkel $\varphi = 90°$ iſt $\sin\varphi = 1$. Der Ausdruck (I) giebt alsdann $\sin\varphi = 1{,}11306$, und der zweite Ausdruck $\sin\varphi = 0{,}99948$.

Wollte man dem erſten Ausdruck eine ſolche Geſtalt geben, daß derſelbe genau $\sin\varphi$ oder $x = 1$ giebt, wenn der Bogen $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder der zugehörige Winkel 90 Grad wird, ſo ſetze man

$$\sin\varphi = \frac{\alpha\varphi}{\beta+\varphi^2},$$

wo α und β ſolche Zahlen bedeuten, welche noch näher zu beſtimmen ſind. Nun iſt für einen Winkel von 90 Grad $\sin\varphi =$ [illegible] und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, alſo

$$1 \;[illegible]\; \frac{\frac{1}{2}\pi\alpha}{[illegible] + \frac{1}{4}\pi^2},$$

und für einen [illegible] 45 Grad iſt $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\varphi = \frac{1}{4}\pi$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} \;[illegible]\; \frac{\frac{1}{4}\pi\alpha}{\beta+\frac{1}{16}\pi^2}.$$

Entwickelt man aus dieſen beiden Gleichungen α und β, ſo wird

$$\alpha = \frac{3\pi}{4(2-\sqrt{2})} \text{ und } \beta = \frac{(2\sqrt{2}-1)\pi^2}{8(2-\sqrt{2})},$$

daher erhält man für den erſten Quadranten

$$\text{(III)} \quad \sin \varphi = \frac{6 \pi \varphi}{(2\sqrt{2} - 1)\pi^2 + 8(2 - \sqrt{2})\varphi^2}.$$

§. 153.

Aufgabe. Für den Kreisbogen, welcher einem gegebenen Sinus entſpricht, einen Näherungsausdruck zu finden.

Auflöſung. Der Kreisbogen, welcher bei einem Halbmeſſer = 1 zum Sinus x gehört, ſei φ, ſo iſt $\sin \varphi = x$ und $\text{Arc} \sin x = \varphi$, alſo (P. A. S. 312.)

$$\text{Arc} \sin x = x + \tfrac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ oder}$$

$$\text{Arc} \sin x = x + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{3}{40} x^5 + \tfrac{5}{112} x^7 + \tfrac{35}{1152} x^9 + \ldots$$

Wird dieſe Reihe in einen Kettenbruch verwandelt, ſo iſt

$$\text{Arc} \sin x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{-\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{17x} + \cfrac{1}{-\cfrac{4046}{549x} + \ldots}}}}$$

Hiedurch erhält man folgende Näherungswerthe:

$$\text{(I)} \quad \text{Arc} \sin x = \frac{6x}{6 - x^2}$$

$$\text{(II)} \quad \text{Arc} \sin x = \frac{(60 - 17x^2)x}{60 - 27x^2}$$

$$\text{(III)} \quad \text{Arc} \sin x = \frac{40(6069 - 2296x^2)x}{3(80920 - 55080x^2 + 3111x^4)}$$

u. ſ. w.

Für $x = 0$ wird $\text{Arc} \sin x = 0$, wie erfordert wird; allein für $x = 1$ muß $\text{Arc} \sin x = \tfrac{1}{2}\pi = 1{,}570796$

werden. Die vorſtehenden Ausdrücke geben aber für dieſen Fall,

nach (I); $\text{Arc} \sin x = 1,2000$

nach (II); $\text{Arc} \sin x = 1,3030$

nach (III); $\text{Arc} \sin x = 1,7376$.

Will man dem zweiten Ausdruck eine ſolche Geſtalt geben, daß er vorzüglich nur mit dem erſten Quadranten in Uebereinſtimmung gebracht wird, ſo ſetze man

$$\text{Arc} \sin x = \frac{\alpha x - \beta x^3}{\gamma - x^2}.$$

Nun iſt für einen Bogen von 90 Grad $x = 1$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, daher

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1}.$$

Für einen Winkel von 60 Grad iſt $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, alſo

$$\tfrac{1}{3}\pi = \frac{\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3} - \frac{3}{8}\beta\sqrt{3}}{\gamma - \frac{3}{4}},$$

und für einen Winkel von 30 Grad wird $x = \frac{1}{2}$ und $\varphi = \frac{1}{6}\pi$, daher

$$\tfrac{1}{6}\pi = \frac{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\beta}{\gamma - \frac{1}{4}}.$$

Aus der Verbindung dieſer drei Gleichungen erhält man

$\alpha = 1,23471$

$\beta = 0,89718$

$\gamma = 1,21488$

daher iſt für den erſten Quadranten

$$\text{(IV)}\quad \text{Arc} \sin \varphi = \frac{(123471 - 89718\, x^2)\, x}{121488 - 100000\, x^2}.$$

§. 154.

Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für den Coſinus zu finden, welcher einem gegebenen Kreisbogen entſpricht.

Auflöſung. Mit Rückſicht auf die Bemerkungen §. 152. ſei der zum Bogen φ gehörige Coſinus $= \cos\varphi$, ſo erhält man (P. A. 1. B. S. 540.)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2\ldots.6} + \frac{\varphi^8}{1.2\ldots..8} - \ldots. \text{ oder}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \frac{\varphi^6}{720} + \frac{\varphi^8}{40320} - \frac{\varphi^{10}}{3628800} + \ldots.$$

Dieſe Reihe in einen Kettenbruch verwandelt giebt

$$\cos\varphi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\varphi^2} + \cfrac{1}{-\cfrac{6}{5} + \cfrac{1}{-\cfrac{250}{3\varphi^2} + \ldots.}}}}$$

und man erhält als Näherungswerthe

$$\text{(I)} \quad \cos\varphi = \frac{2}{2 + \varphi^2}$$

$$\text{(II)} \quad \cos\varphi = \frac{12 - 5\varphi^2}{12 + \varphi^2}$$

$$\text{(III)} \quad \cos\varphi = \frac{600 - 244\varphi^2}{3\varphi^4 + 56\varphi^2 + 600} \text{ u. ſ. w.}$$

Sämmtliche Ausdrücke geben für $\varphi = 0$; $\cos\varphi = 1$, wie erfordert wird. Für einen Bogen von 90 Grad wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; man erhält alsdann

nach (I), $\cos\varphi = + 0,4477$

nach (II), $\cos\varphi = - 0,0233$

nach (III), $\cos\varphi = - 0,0027$.

Hieraus folgt, daß der erſte Ausdruck innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und 90 Grad unbrauchbar iſt, daß man aber für Bogen, welche in den erſten Quadranten fallen,

den zweiten oder mit mehrerer Genauigkeit den dritten Ausdruck beibehalten kann.

Verlangt man, daß nach dem zweiten Ausdruck für einen Winkel von 90 Grad der Coſinus genau $= 0$ werden ſoll, ſo ſei

$$\cos \varphi = \frac{\alpha - \beta \varphi^2}{\alpha + \varphi^2}.$$

Für einen Winkel von 60 Grad iſt $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ und $\cos \varphi = \cos 60° = \frac{1}{2}$, alſo

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha - \frac{1}{9}\pi^2 \beta}{\alpha + \frac{1}{9}\pi^2},$$

und für einen Winkel von 90 Grad iſt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\cos \varphi = 0$, daher

$$0 = \frac{\alpha - \frac{1}{4}\pi^2 \beta}{\alpha + \frac{1}{4}\pi^2} \text{ oder } \alpha = \frac{1}{4}\pi^2 \beta.$$

Hieraus findet man

$$\alpha = \pi^2 \text{ und } \beta = 4,$$

daher iſt für den erſten Quadranten

$$(IV) \cos \varphi = \frac{\pi^2 - 4\varphi^2}{\pi^2 + \varphi^2}.$$

Um die Genauigkeit dieſes Ausdrucks zu überſehen, dient folgende Tafel:

Grade des Bogens φ	φ	Wahre Werthe für $\cos \varphi$.	Berechnete Werthe für $\cos \varphi$.
0°	0,0000	1,0000	1,0000
15°	0,2618	0,9659	0,9655
30°	0,5236	0,8660	0,8648
45°	0,7854	0,7071	0,7059
60°	1,0472	0,5000	0,5000
75°	1,3090	0,2588	0,2604
90°	1,5708	0,0000	0,0000

§. 155.

Aufgabe. Für den Kreisbogen, welcher einem gegebenen Coſinus entſpricht, einen Näherungsausdruck zu finden.

Auflöſung. Der Kreisbogen, deſſen Coſinus $= x$ iſt, ſei φ, ſo iſt $\cos \varphi = x$ und $\text{Arc} \cos x = \varphi$. Weil aber $\text{Arc} \cos x = \frac{1}{2}\pi - \text{Arc} \sin x$, ſo findet man nach §. 153. folgende Näherungswerthe

$$(\text{I})\quad \text{Arc} \cos x = \frac{1}{2}\pi - \frac{6x}{6 - x^2}$$

$$(\text{II})\quad \text{Arc} \cos x = \frac{1}{2}\pi - \frac{(60 - 17x^2)\,x}{60 - 27x^2}$$

u. ſ. w.

Soll der erſte Ausdruck nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = 1$ angewandt werden, ſo ſetze man

$$\text{Arc} \cos x = \frac{1}{2}\pi - \frac{\alpha x}{\beta - x^2},$$

alsdann iſt für $x = 1$ der Bogen φ oder $\text{Arc} \cos x = 0$, daher

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\alpha}{\beta - 1},$$

und bei einem Winkel von 45 Grad iſt $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, wenn $x = 0{,}7071068$ wird, man erhält daher auch

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{0{,}7071068\,\alpha}{\beta - 0{,}5}.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen findet man

$$\alpha = 1{,}896 \text{ und } \beta = 2{,}207, \text{ daher}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1{,}896\,x}{2{,}207 - x^2}, \text{ oder}$$

$$(\text{III})\quad \text{Arc} \cos x = \frac{3{,}468 - 1{,}896\,x - 1{,}571\,x^2}{2{,}207 - x^2}.$$

Für verſchiedene Werthe von x erhält man nachſtehende Tafel zur Vergleichung mit den wahren Werthen:

Grade des Bogens φ.	$x = \cos\varphi$.	Wahre Werthe für Arc cos x.	Berechnete Werthe für Arc cos x.
90°	0,0000	1,5708	1,5708
75°	0,2588	1,3090	1,3415
60°	0,5000	1,0472	1,0864
45°	0,7071	0,7854	0,7858
30°	0,8660	0,5240	0,4439
0	1,0000	0,0000	0,0000

§. 156.

Aufgabe. Einen Näherungswerth für das Quadrat eines Kreisbogens zu finden, welcher einem gegebenen Coſinus zugehört.

Auflöſung. Es ſei φ der Bogen, zu welchem für den Halbmeſſer 1 der Coſinus $= x$ gehört, ſo iſt $\cos\varphi = x$ alſo $\varphi = \text{Arc}\cos x$. Aber (P. A. S. 313.)

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{40}x^5 - \tfrac{5}{112}x^7 - \tfrac{35}{1152}x^9 - \ldots$$

daher wenn man die Reihe quadrirt

$$\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2 + \left\{\begin{array}{l} -\pi\left(x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \ldots\right) \\ + x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 + \tfrac{4}{35}x^8 + \ldots \end{array}\right\}$$

Verwandelt man dieſe Reihe in einen Kettenbruch, ſo iſt

$$\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\pi^2 = \cfrac{1}{-\cfrac{1}{\pi x} + \cfrac{1}{-\pi^2 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{\pi(6-\pi^2)x} + \cfrac{1}{\cfrac{(6-\pi^2)^2}{\pi^2 - 12} + \ldots}}}}$$

und man erhält als Näherungswerthe

$$\text{(I)} \quad \varphi^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2 - \pi x.$$

$$\text{(II)} \quad \varphi^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2 - \frac{\pi^2 x}{\pi + x}.$$

$$\text{(III)} \quad \varphi^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2 - \frac{6\pi x + (\pi^2 - 6)x^2}{6 + \pi x}.$$

$$= \frac{6\pi^2 - \pi(24 - \pi^2)x - 4(\pi^2 - 6)x^2}{4(6 + \pi x)}.$$

$$= \frac{14{,}8044 - 11{,}098\,x - 3{,}8696\,x^2}{6 + \pi x}.$$

u. ſ. w.

Um die Uebereinſtimmung des letzten Ausdrucks mit dem wahren Werthe von φ^2 für den erſten Quadranten zu überſehen, dient folgende Zuſammenſtellung.

Grade des Bogens φ	$x = \cos\varphi$	Wahre Werthe für φ^2	Berechnete Werthe für φ^2
90°	0,0000	2,4674	2,4674
60°	0,5000	1,0966	1,0947
45°	0,7071	0,6168	0,6110
30°	0,8660	0,2742	0,2627
0°	1,0000	0,0000	−0,0178

Damit der für φ^2 gefundene Ausdruck für $x = 1$ genau $\varphi^2 = 0$ gebe, kann man mit demſelben noch nachſtehende Abänderung vornehmen, indem man die Coeffizienten der beiden letzten Glieder des Zählers als unbeſtimmt annimmt. Alsdann iſt

$$\varphi^2 = \frac{14{,}8044 - \alpha x - \beta x^2}{6 + \pi x}.$$

Für x = 1 erhält man $\varphi^2 = 0$, alſo

$$0 = \frac{14,8044 - \alpha - \beta}{6 + \pi}, \text{ oder } \alpha + \beta = 14,8044.$$

Ferner iſt für $x = 0,866$; $\varphi^2 = 0,2742$, daher

$$0,2742 = \frac{14,8044 - 0,866\,\alpha - 0,866^2\,\beta}{6 + 0,866\,\pi}.$$

Aus der Verbindung beider Gleichungen erhält man

$$\alpha = 11,1532 \text{ und } \beta = 3,6512,$$

folglich iſt der geſuchte Werth für $(\text{Arc}\cos x)^2$, oder

$$\text{(IV)}\quad \varphi^2 = \frac{14,8004 - 11,1532\,x - 3,6512\,x^2}{6 + \pi x}.$$

Berechnet man nach dieſem Ausdruck verſchiedene Werthe für φ^2, ſo entſteht folgende Vergleichung

Grade des Bogens φ	$x = \cos\varphi$	Wahre Werthe für φ^2	Berechnete Werthe für φ^2
90°	0,0000	2,4674	2,4674
60°	0,5000	1,0966	1,0982
45°	0,7071	0,6168	0,6195
30°	0,8660	0,2742	0,2742
0°	1,0000	0,0000	0,0000

§. 157.

Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für die Tangente eines gegebenen Kreisbogens zu finden.

Auflöſung. Der gegebene Kreisbogen für den Halbmeſſer = 1 sei φ, ſo iſt ſeine Tangente = $\text{tgt}\,\varphi$, und man hat (P. A. 1. B. S. 541.)

$$\text{tgt}\,\varphi = \varphi + \frac{2}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{2^4}{1.2.3.4.5}\varphi^5 + \frac{2^4.17}{1\ldots\ldots 7}\varphi^7 + \frac{2^8.31}{1\ldots\ldots 9}\varphi^9 + \ldots$$

oder

$$\text{tgt}\,\varphi = \varphi + \tfrac{1}{3}\varphi^3 + \tfrac{2}{15}\varphi^5 + \tfrac{17}{315}\varphi^7 + \tfrac{64}{2835}\varphi^9 + \ldots$$

Dieſe Reihe in einen Kettenbruch verwandelt, giebt

$$\text{tgt}\,\varphi = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{3}{\varphi} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{7}{\varphi} + \ldots}}}}$$

woraus man folgende Näherungswerthe erhält:

$$\text{(I)} \quad \text{tgt}\,\varphi = \frac{3\varphi}{3 - \varphi^2}.$$

$$\text{(II)} \quad \text{tgt}\,\varphi = \frac{(15 - \varphi^2)\,\varphi}{15 - 6\,\varphi^2}.$$

$$\text{(III)} \quad \text{tgt}\,\varphi = \frac{5\,(21 - 2\,\varphi^2)\,\varphi}{105 - 45\,\varphi^2 + \varphi^4} \text{ u. ſ. w.}$$

Soll der erſte Ausdruck nur für den erſten Quadranten gelten, ſo ſetze man

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{\alpha\varphi}{\beta - \varphi^2}.$$

Für einen Winkel von 90 Grad wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und $\text{tgt}\,\varphi = \infty$. Damit dieſe Bedingung erfüllt werde, muß der Nenner $\beta - \varphi^2$ verſchwinden, alſo $\beta = \frac{1}{4}\pi^2$ ſeyn. Man hat alſo $\text{tgt}\,\varphi = \dfrac{\alpha\,\varphi}{\frac{1}{4}\pi^2 - \varphi^2}$.

Für einen Winkel von 45 Grad iſt $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ und $\text{tgt}\,\varphi = 1$, alſo

$$1 = \frac{\frac{1}{4}\pi\alpha}{\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{16}\pi^2}, \text{ oder } \alpha = \tfrac{3}{4}\pi.$$

Hiedurch erhält man

$$\text{(IV)} \quad \text{tgt}\,\varphi = \frac{3\pi\varphi}{\pi^2 - 4\varphi^2}.$$

Welche Genauigkeit von dieſem Ausdruck für den erſten Quadranten zu erwarten iſt, überſieht man aus nachſtehender Tafel:

Grade des Bogens φ	Wahre Werthe für tgt φ	Berechnete Werthe für tgt φ
0°	0, 00000	0, 00000
15°	0, 26795	0, 25714
30°	0, 57735	0, 56250
45°	1, 00000	1, 00000
60°	1, 73205	1, 80000
75°	3, 73205	4, 09090
90°	∞	∞

Verlangt man einen Ausdruck welcher die Werthe tgt φ genauer angiebt, ſo ſetze man nach (II)

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{(\beta - \varphi^2)\,\varphi}{3\,(\frac{1}{2}\pi^2 - 2\,\varphi^2)}.$$

Für einen Winkel von 45 Grad iſt $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, und tgt $\varphi = 1$, alſo

$$1 = \frac{(\beta - \frac{1}{16}\pi^2)\,\frac{1}{4}\pi}{3\,(\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{8}\pi^2)},$$ und hieraus

$$\beta = \frac{\pi^2 + 72\,\pi}{16} = 14{,}754.$$

Hiernach erhält man

$$\text{(V)}\quad \text{tgt}\,\varphi = \frac{(14{,}754 - \varphi^2)\,\varphi}{6\,(2{,}9674 - \varphi^2)}.$$

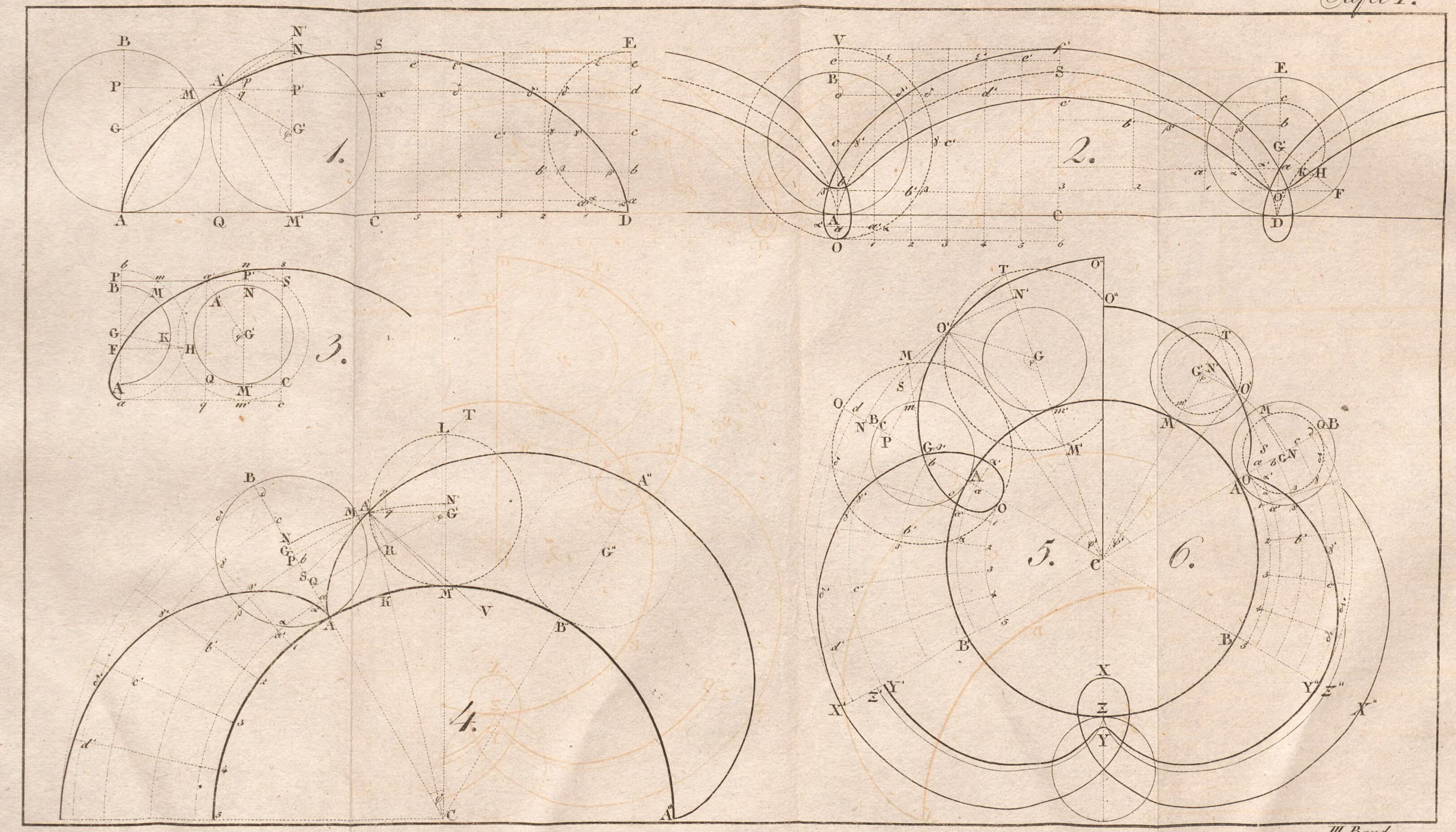
Ende.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

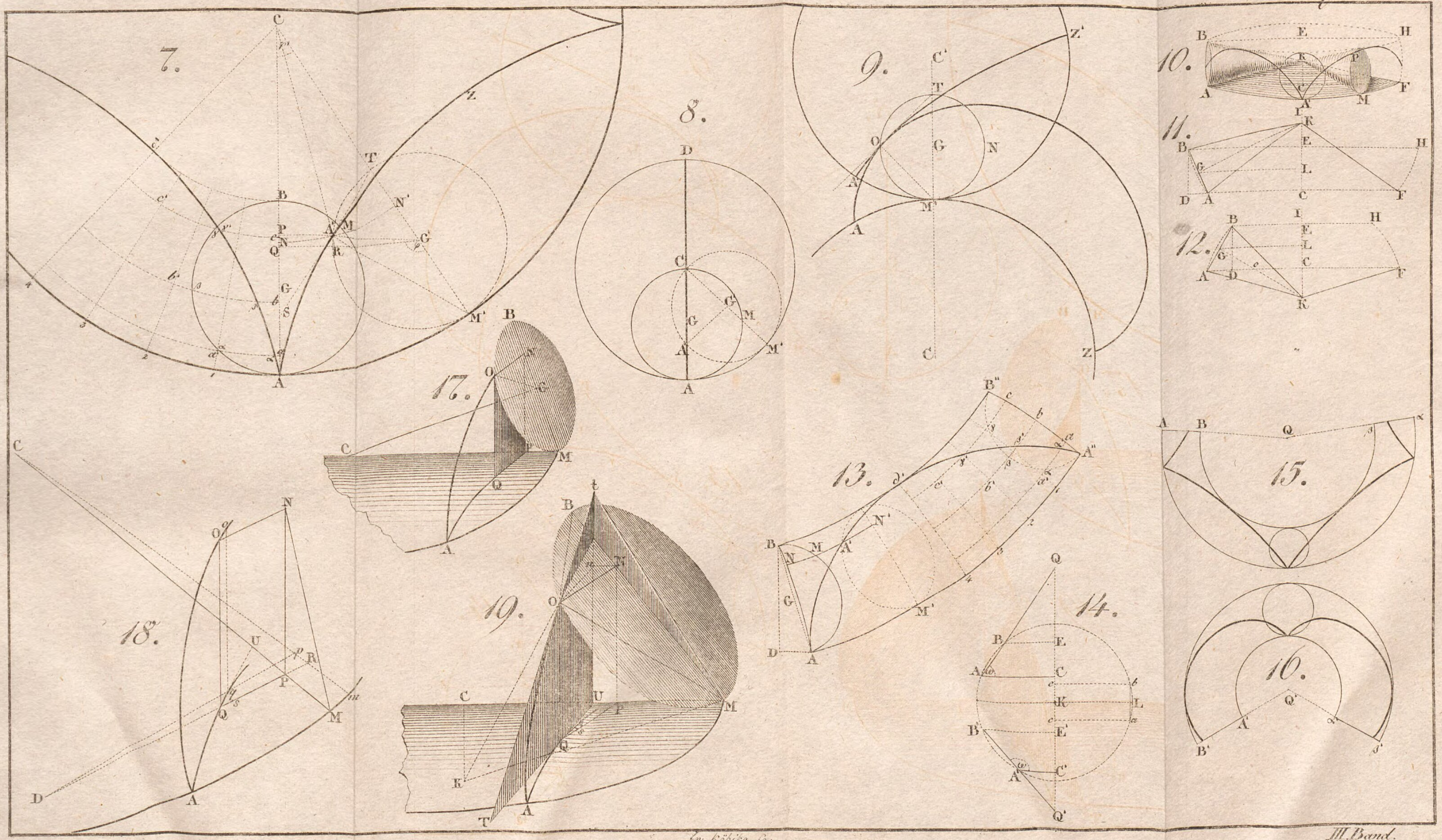
Druckfehler im erſten Bande.

Seite 216. Zeile 7. v. o. ſtatt $\frac{b\,(2P + 2M) + cN}{b\,(2P + 2M + R) + cN}$

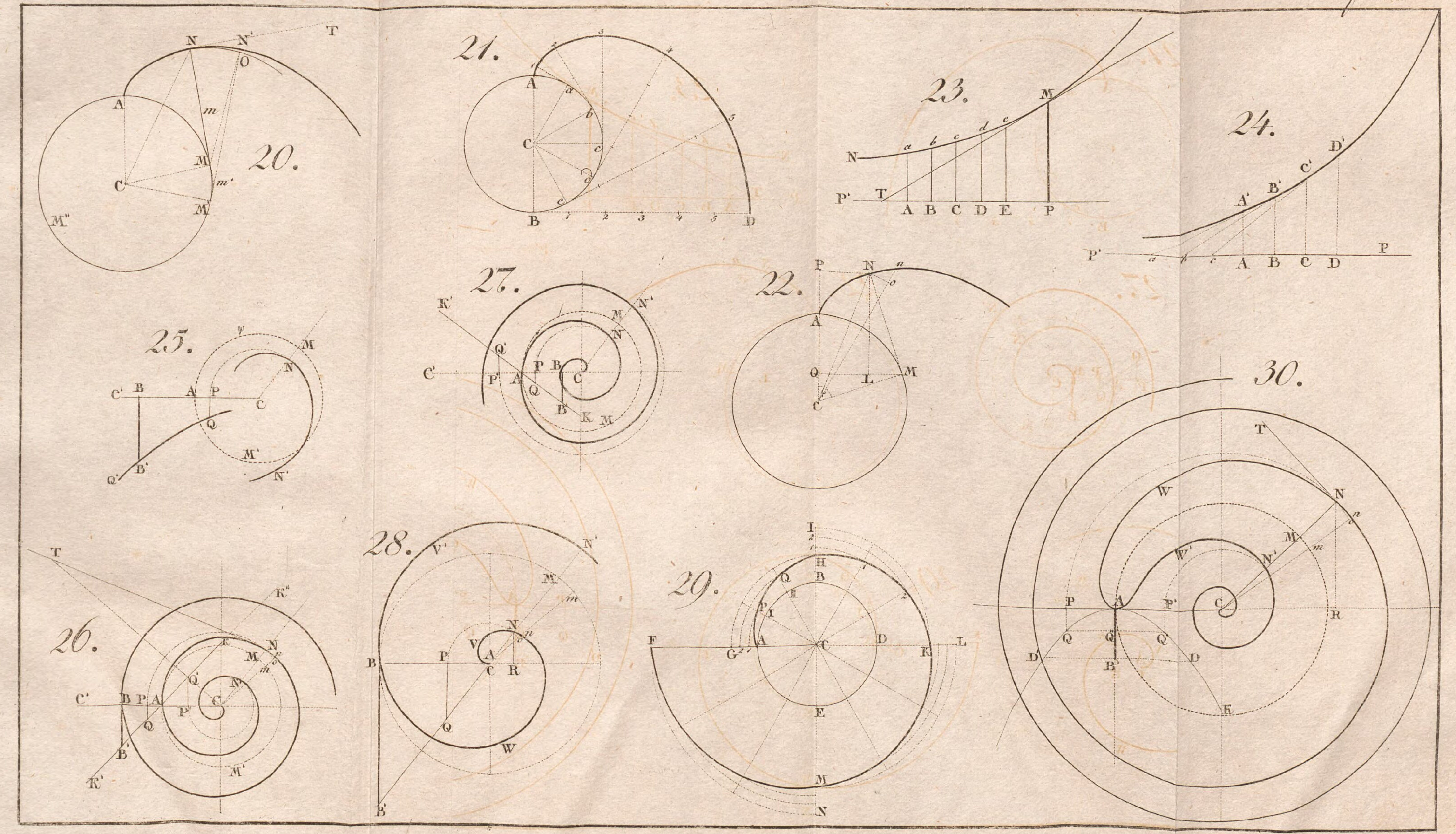
leſe man $\frac{b\,(2P + 2M) + cN}{b\,[b\,(2P + 2M + R) + cN]}$.

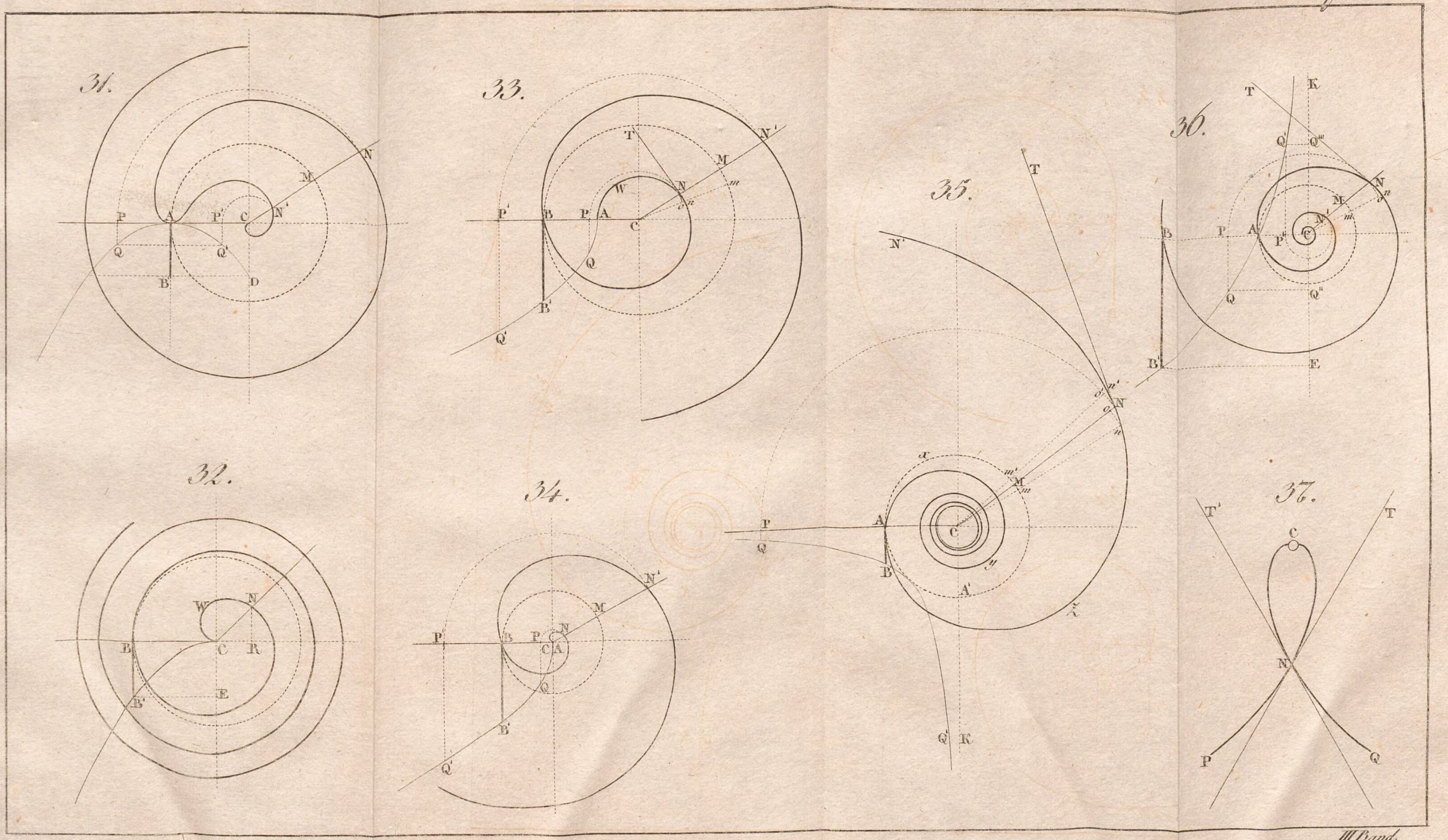


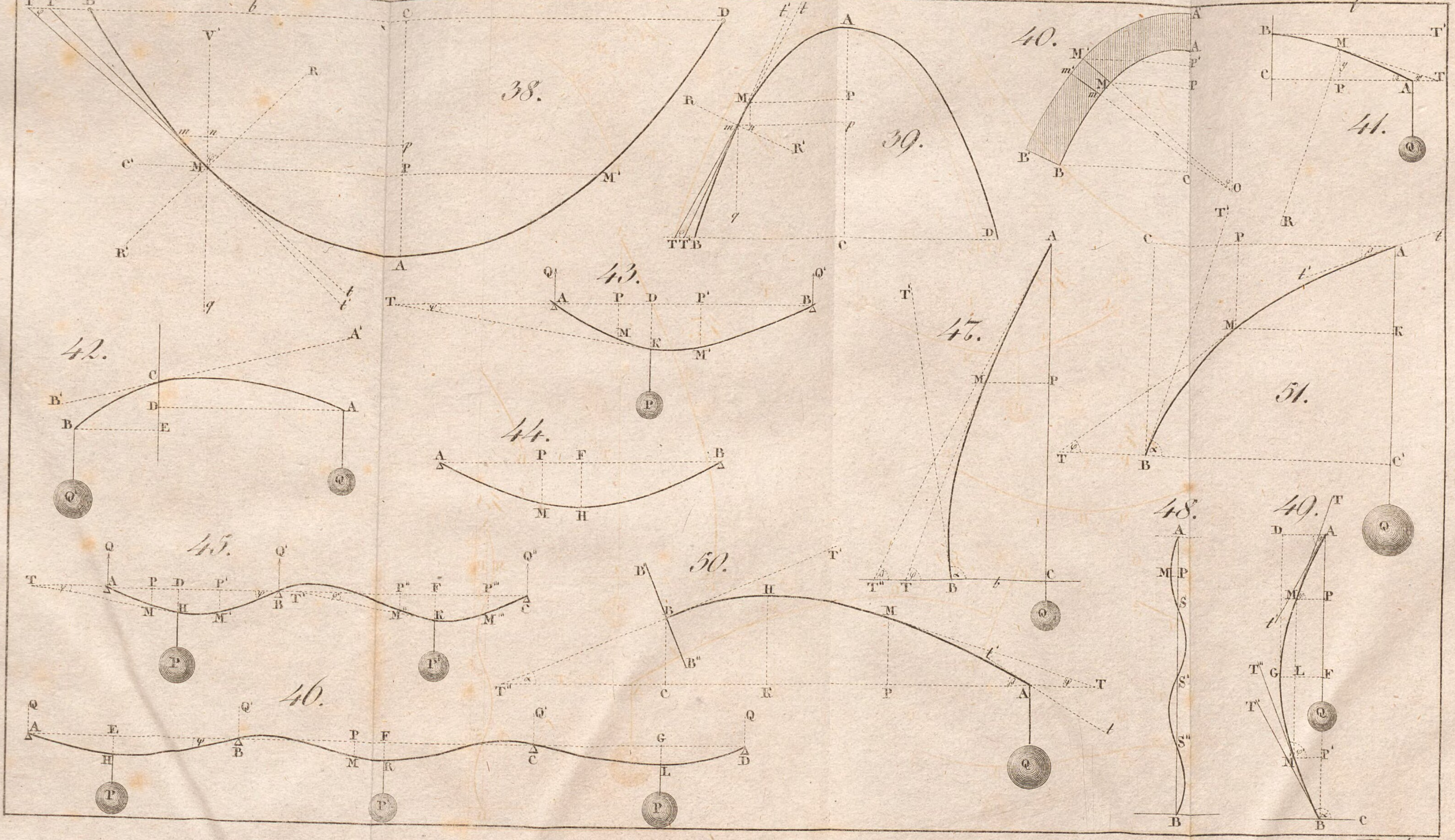
Tafel II.



Fr. Köbike sc.


20.
21.
23.
24.
22.
25.
27.
30.
26.
28.
29.


31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.


38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Eytelwein, Johann Albert,

Theorie derjenigen transcendenten krummen Linien, welche vorzüglich bei statischen Untersuchungen vorkommen

Berlin 1808

Math.a. 79 m-2/3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10138388-9